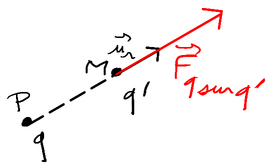
Introduction à l'électromagnétisme

I) Le champ électromagnétique

1) Le champ électrique $\vec{E}$

Considérons 2 charges q et q' placées respectivement en P et M distantes de r=PM.

- Elles subissent une interaction (loi de Coulomb) :
  - variant en $\frac{1}{r^2}$
  - proportionnelle à q et à q'

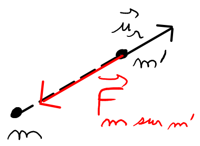


$$\vec{F}_{q \to q'} = \frac{q \cdot q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

Loi de Coulomb

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-2}\,F.m^{-1}$ permittivité du vide

- Cette loi est similaire à la loi de Newton en mécanique entre 2 masses :



$$\vec{F}_{m \to m'} = -\mathcal{G}\,\frac{m\,m'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

On peut considérer que la charge q crée un champ électrique

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

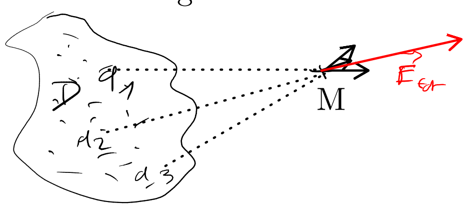
et que q' subit la force de la part de E : $\vec{F} = q'\vec{E}(M)$

$$= q' \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

$\vec{E}(M)$ est le champ électrique (champ de vecteur)

Ce champ est additif (théorème de superposition). Pour un ensemble de charges qi créant chacune un champ $\vec{E}_i(M)$, le champ total en M est :

Distribution de charges D



$$\underbrace{\vec{E}(M)}_{\text{total}} = \sum_i \underbrace{\vec{E}_i(M)}_{\text{créé par chaque } q_i}$$

$$\vec{F}_{D\,sur\,q'} = q' \times \vec{E}(M)$$

Les charges sont donc source de champ électrique $\vec{E}(M)$

2) Le champ magnétique $\vec{B}$

Si de plus les charges de D se déplacent (= courant électrique) : le courant électrique crée un champ magnétique $\vec{B}$

3) Le champ électromagnétique

Dans un problème dynamique (charges mobiles), il y a donc généralement à la fois un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$: c'est le champ électromagnétique

$$\left[\vec{E}(M,t)\,,\ \vec{B}(M,t)\right]$$

(description due à Mickael Faraday dans les années 1830)

Une charge q' présente en M et se déplaçant à une vitesse v dans ce champ életromagnétique subit une force de Lorentz :

$$\vec{F} = q'\,\vec{E}(M,t) + q'\,\vec{v} \wedge \vec{B}(M,t)$$

Remarque : il ne faut considérer que le champ électromagnétique E et B créé par les charges extérieures à q' !

4) Découplage en régime stationnaire

Le champ $\vec{E}(M,t)$ est lié au champ $\vec{B}(M,t)$ et réciproquement par les 4 équations de Maxwell (1865) :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell Gauss)

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

(Maxwell Thomson ou flux)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell Faraday)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(Maxwell Ampère)

ε_0 : permittivité du vide $\left(\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F/m} = \mathrm{A^2 s^4 kg^{-1} m^{-3}}\right)$

μ_0 : perméabilité magnétique du vide $\left(\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{T.m.A^{-1}} = \mathrm{kg\,m\,A^{-2} s^{-2}}\right)$

On constate sur les équations de Maxwell, que :

Si $\vec{B}$ varie dans le temps $\Longrightarrow$ alors il existe un champ $\vec{E} \neq \vec{0}$

Si $\vec{E}$ varie dans le temps $\Longrightarrow$ alors il existe un champ $\vec{B} \neq \vec{0}$

Les 2 champs E et B sont indissociables dans le cas non stationnaire.

Par contre, dans le cas stationnaire : $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

donc :

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (MG)

$\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{E} = 0}_{\text{Electrostatique}}$ (MF)

(1) Les charges ρ créent un champ $\vec{E}$

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (MT)

(2) $\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}_{\text{Magnétostatique}}$ (MA)

(2) Les courants $\vec{j}$ créent un champ $\vec{B}$

En régime stationnaire, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ deviennent indépendants l'un de l'autre

II) Les symétries du champ

1) Le principe de Curie

En physique, le principe de Pierre Curie affirme que :

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits

Symétrie dans une cause $\Longrightarrow$ Symétrie (ou antisymétrie) dans l'effet

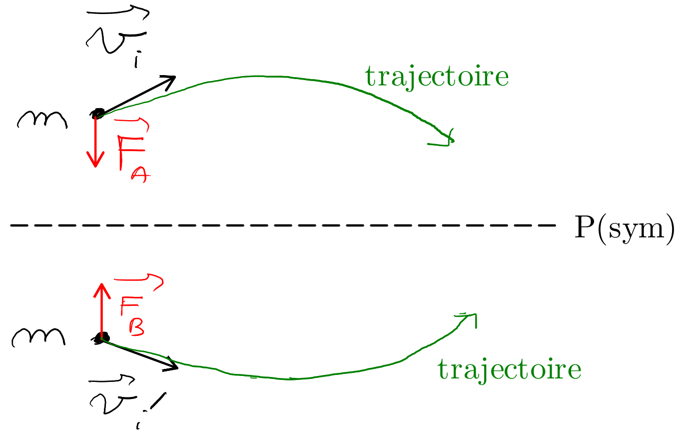
Prenons un exemple en mécanique du point.

Pour connaître la trajectoire d'un point de masse, nous appliquons le principe fondamental de la dynamique. Pour cela, nous avons besoin de connaîre les forces, la masse ainsi que la position et la vitesse.

- Causes = Force + masse + position + vitesse.
- Conséquence = Trajectoire

Prenons un plan de symétrie P des causes, avec 2 masses identiques placées à des positions et vitesses symétriques, et soumises à 2 forces symétriques.

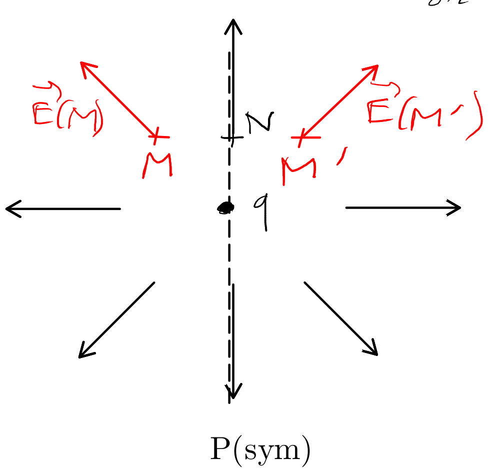
Les trajectoires sont alors symétriques.



2) Symétries du champ électrique

Causes = charges (q ou ρ) $\longrightarrow$ Conséquences = champ E

Charge ponctuelle : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

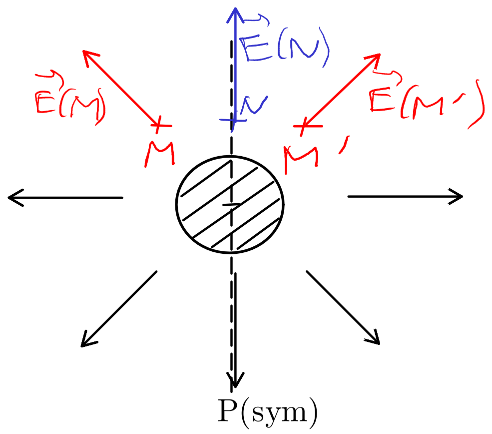


La loi de Coulomb respecte le principe de Curie

En 2 points symétriques/P(sym) M et M'

Les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques

Sphère de centre O chargée uniformément ρ ///



La loi de Maxwell Gauss $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

respecte le principe de Curie :

le champ $\vec{E}$ diverge des charges ρ

En 2 points symétriques/P(sym) M et M'

Les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques

De plus, en un point N appartenant au plan de symétrie, $\vec{E}(N) \in P_{sym}$

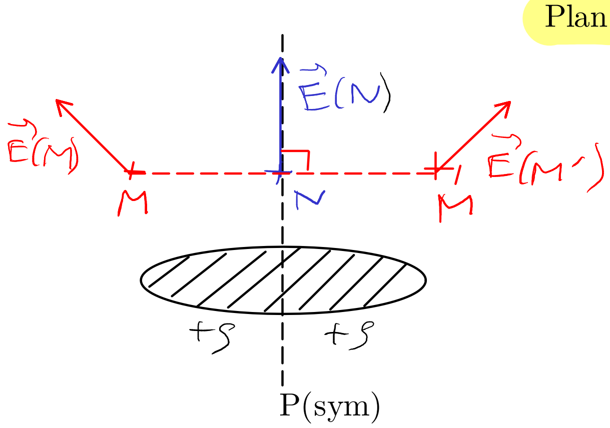
En effet, considérons le point N' symétrique du point N /P(sym). On a N'=N !

Donc $\vec{E}(N')=\vec{E}(N)$. Le champ $\vec{E}(N)$ doit donc être égal à son symétrique, donc appartenir au plan de symétrie Psym.

a) Cas des plans de symétrie des charges

Ce résultat se généralise à toute distribution de charges électriques contenant un plan de symétrie Psym :

Plan de symétrie des charges = plan de symétrie de E

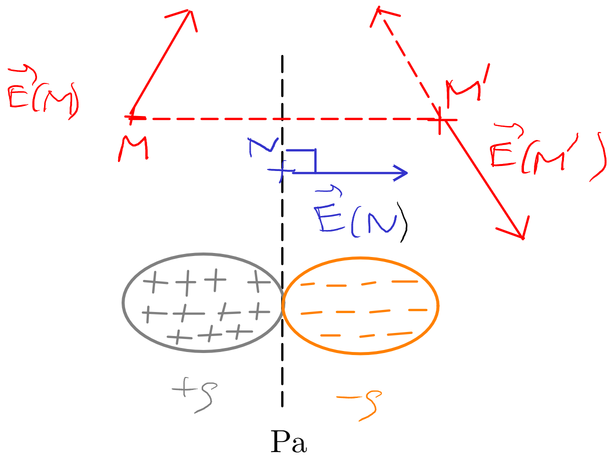


De plus, si $N \in P_{sym}$, alors $\vec{E}(M) \in P_{sym}$

b) Cas des plans d'antisymétrie des charges

Soit Pa un plan d'antisymétrie des charges. Un plan d'antisymétrie signifie qu'en prenant l'image à travers un miroir Pa, cela inverse les signes.

Considérons un dipôle (charge volumique $+\rho$, et dans la zone symétrique, charge volumique $-\rho$



Plan de d'antisymétrie des charges
= plan d'antisymétrie de E

Ce qui signifie que en M' symétrique de M :

$$\vec{E}(M') = -\,\mathrm{sym}\{\vec{E}(M)\}$$

De plus, si $N \in \mathcal{P}$, alors $\vec{E}(N) \perp \mathcal{P}_a$

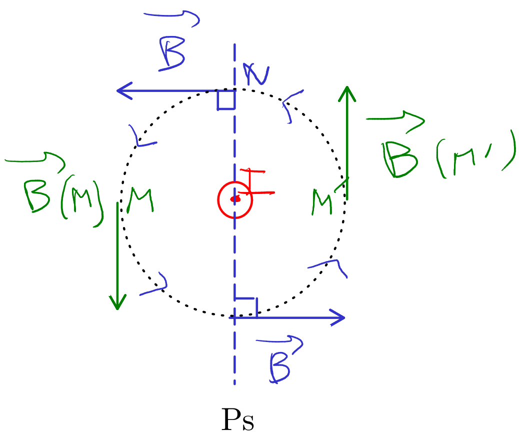
2) Symétries du champ magnétique

Causes = courants $(I \text{ ou } \vec{j})$ ⟶ Conséquences = champ B

Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

a) Cas des plans de symétrie du courant

L'équation de Maxwell Ampère traduit le fait que le champ B tourne autour du courant $(\vec{\mathrm{rot}}\ldots)$



Prenons l'exemple d'un fil rectiligne perpendiculaire à la feuille et parcouru par un courant I.

Les lignes de B forment des cercles autour de ce fil.

Soit Ps un plan de symétrie des courants (ici contenant le fil), et M et M' 2 points symétriques par rapport à Ps.

On a $\vec{B}(M') = -\,\mathrm{sym}(\vec{B}(M))$

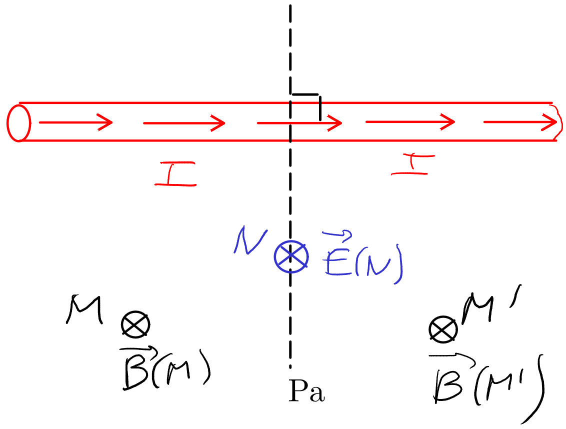
Plan de symétrie des courants = plan d'antisymétrie de $\vec{B}$

De plus, si $N \in \mathcal{P}_s$, alors $\vec{B}(N) \perp \mathcal{P}_s$

C'est l'opérateur rotationnel qui change les plans de symétrie du courant en plan de symétrie du champ B (effet de la rotation) et réciproquement. Ce résultat se généralise donc.

b) Cas des plans d'antisymétrie du courant

Reprenons le cas d'un fil électrique rectiligne parcouru par un courant I



Soit Pa un plan d'antisymétrie du courant.

Le plan Pa représenté sur la figure, perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie du courant : en effet, en prenant l'image du courant à travers le miroir Pa, le courant se trouve inversé.

Plan Pa d'antisymétrie du courant = plan de symétrie du champ $\vec{B}$

En 2 points symétriques M et M', on a donc : $\vec{B}(M')$ symétrique de $\vec{B}(M)$

De plus, si $N \in P_a$, alors $\vec{B}(N) \in P_a$

En conlusion :

Electrostatique

Charges	$\Longrightarrow$	Champ E	si $N \in \mathcal{P}$ alors :
P symétrie	$\longrightarrow$	P symétrie	$\vec{E}(N) \in \mathcal{P}$
P antisym	$\longrightarrow$	P antisym	$\vec{E}(N) \perp \mathcal{P}$

Magnétostatique

Courant	$\Longrightarrow$	Champ B	si $N \in \mathcal{P}$ alors :
P symétrie	$\longrightarrow$	P antisym	$\vec{B}(N) \perp \mathcal{P}$
P antisym	$\longrightarrow$	P symétrie	$\vec{B}(N) \in \mathcal{P}$