Électrostatique

I) Le champ électrostatique

Rappel : Maxwell Gauss $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Maxwell Faraday $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\cancel{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} = \vec{0}$

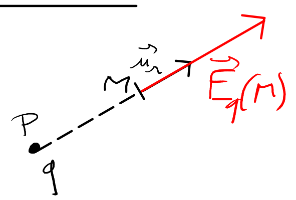
Pour calculer un champ électrique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges, il y a 2 méthodes :

Calcul à l'aide de la loi de Coulomb ;

Calcul à l'aide de Maxwell Gauss, ou du théorème de Gauss (qui est l'écriture globale de Maxwell Gauss)

a) Calcul de $\vec{E}$ à partir de la loi de Coulomb :

- 1 charge

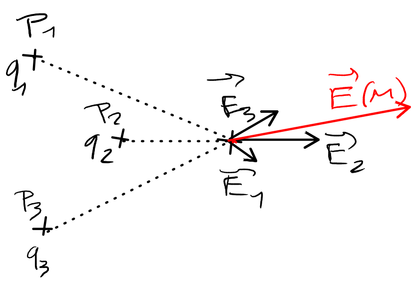


Pour 1 charge ponctuelle q placée en P :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$$

avec $r = PM$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{PM}}{PM}$

- N charges



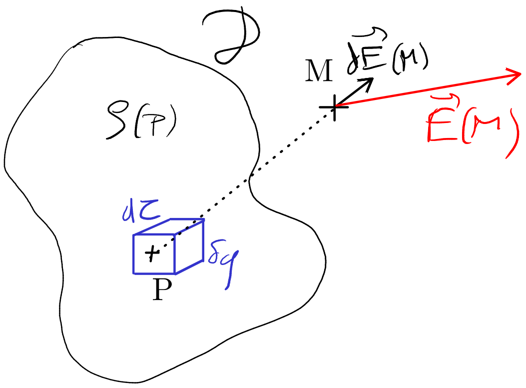
Pour N charges ponctuelles qi placée respectivement en Pi :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$$

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\,\vec{u}_{r_i}$$

avec $r_i = P_iM$ et $\vec{u}_{r_i} = \frac{\vec{P_iM}}{P_iM}$

- Distribution volumique de charges dans un domaine $\mathcal{D}$



Considérons un point P au niveau des charges et un petit volume $d\tau$ entourant le point P.

La charge contenue dans ce volume $d\tau$ est $\delta q = \rho(P) \, . \, d\tau$ et crée une champ :

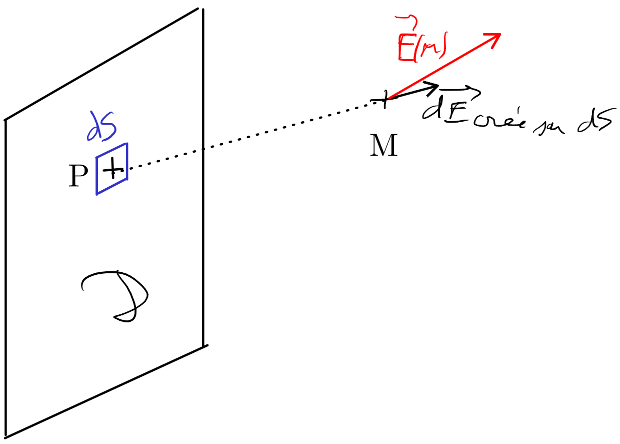
$$\vec{dE} = \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM}$$

On a donc le champ total créé par la distribution volumique $\rho(P)$:

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P) \, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Cette intégrale est généralement trop compliquée à calculer car les termes $\rho(P)$, PM, $d\tau$ mais aussi le vecteur $\vec{u}_{PM}$ sont des variables dans l'intégrale !

- Distribution surfacique de charges $\sigma(P)$



La charge δq présente sur dS est :

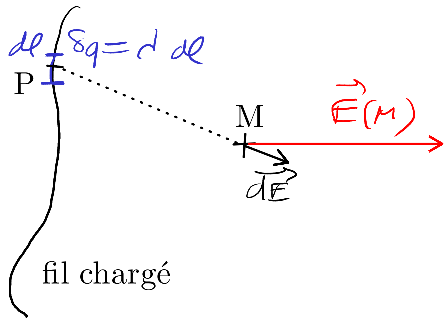
$$\delta q = \sigma(P) \, . \, dS$$

donc :

$$\vec{E}(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$$

$$\vec{E}(M) = \iint_{\underbrace{\mathcal{D}}_{S_{\text{chargée}}}} \frac{\sigma(P) \, . \, dS}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM}$$

- Distribution linéique de charges $\lambda(P)$



$$\vec{E}(M) = \int_{\text{fil chargé}} \frac{\lambda(P) \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{r_{PM}}$$

b) Calcul de $\vec{E}$ à partir de Maxwell Gauss :

Le calcul direct du champ électrique à partir des lois de Coulomb donne des intégrales trop compliquées à calculer "à la main", et nécessite généralement un outil numérique.

Nous verrons plus loin dans ce chapitre, que, quand il y a suffisamment de symétries et d'invariances, l'utilisation de l'équation de Maxwell Gauss ou du théorème de Gauss est une alternative plus simple pour calculer $\vec{E}$.

II) Le potentiel électrostatique

1) Expression du potentiel

Effectuons une analogie entre la force de Coulomb et la force de Newton en mécanique, ainsi que les énergies potentielles Ep dont elles dérivent :

Mécanique : force de Newton	Électrostatique : force de Coulomb
$\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F} = \dfrac{q q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$
$E_p = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$	$E_p = \dfrac{q q'}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Les 2 forces sont similaires : elles sont proportionelles à m (q),

varient en $1/r^2$ et sont dirigées selon $\vec{u}_r$.

Une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle quand il existe une fonction Ep telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(M)$$

Ici, la force étant radiale : $\vec{F} = -\dfrac{\partial E_p(r)}{\partial r}\,\vec{u}_r$

Soit $\vec{E}(M)$ le champ électrique en M créé par la charge q placée en P. La charge q' placée en M subit la force $\vec{F}$, force qui dérive d'un énergie potentielle :

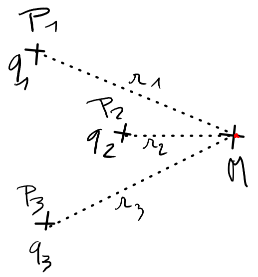
$$\begin{cases} \vec{F} = \dfrac{q'q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r = q'\,\vec{E}(M) \\ \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(M) \end{cases}$$

donc $q'\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p(M)$

soit $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{E_p}{q'}\right)$

Il existe donc un potentiel V(M) appelé potentiel électrique, tel que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V(M))$

avec $E_p = q'V(M)$.



Pour une charge q , il vient donc : $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

$\vec{E}$ est additif, donc $V(M)$ l'est aussi

Pour une assemblée de charges q_i, placées en P_i :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

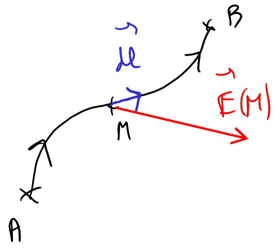
2) Circulation du champ

$V(M)$ est un champ scalaire, donc dépendant de 3 variables spaciales.

Par définition du gradient : $dV = \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{dl}$

(lors d'un petit déplacement $\vec{dl}$, le potentiel V varie d'un quantité dV)

Calculons la circulation de $\vec{E}$ sur un contour $\mathcal{C}$ allant de A à B :



$$\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B -\overrightarrow{grad}V.\vec{dl} = -\int_A^B dV = -\left[V\right]_A^B$$

soit $$\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = -\left(V(B)-V(A)\right) = -\Delta V$$

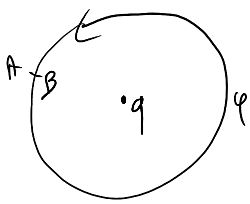
Remarque : un résultat similaire a été vu en sup avec la circulation de $\vec{F}$.

Le travail de la force pour aller de A à B est :

$$W_{A\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = \int_A^B -\overrightarrow{grad}E_p.\vec{dl} = -\int_A^B dE_p = -\left[E_p\right]_A^B$$

soit $W_{A\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}B} = -\Delta E_p$ pour une force conservative.

Calculons en particulier la circulation de $\vec{E}$ sur un contour fermé :



$$\oint_{A\underset{\mathcal{C}}{\rightarrow}B} \vec{E}.\vec{dl} = -\left(V(B)-V(A)\right) \quad \text{or } A=B \quad \text{donc : } \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\vec{dl} = 0$$

Tout champ dérivant d'un potentiel est à circulation nulle sur un contour fermé.

Cela est lié à son caractère irrotationnel.

Vérifions le : ici $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ (MF) en électrostatique.

Or d'après le théorème de Stokes : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{E}.\vec{dS}$ donc $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}.\vec{dl} = 0$

S s'appuie sur $\mathcal{C}$

Tout champ de vecteur irrotationnel est à circulation nulle sur un contour fermé.

En fait, on peut démontrer que les 2 sont équivalents :

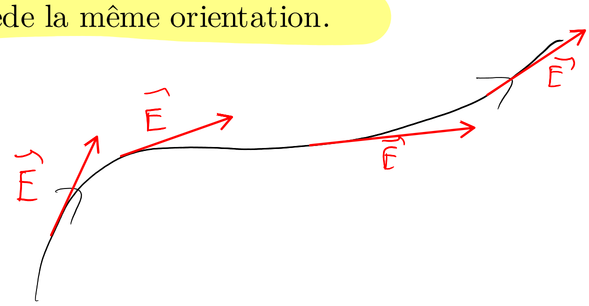
$$\forall M \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M) = 0 \iff \exists V, \quad \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$$

En résumé :
$$\begin{cases} div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = 0 \iff \exists V(M), \ \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,V(M) \end{cases}$$

3) Propriétés topographiques

- Définition : ligne de champ

Une ligne de champ est une courbe orientée qui est, en chacun de ses points, tangente au vecteur champ, et possède la même orientation.



- Définition : surfaces équipotentielles

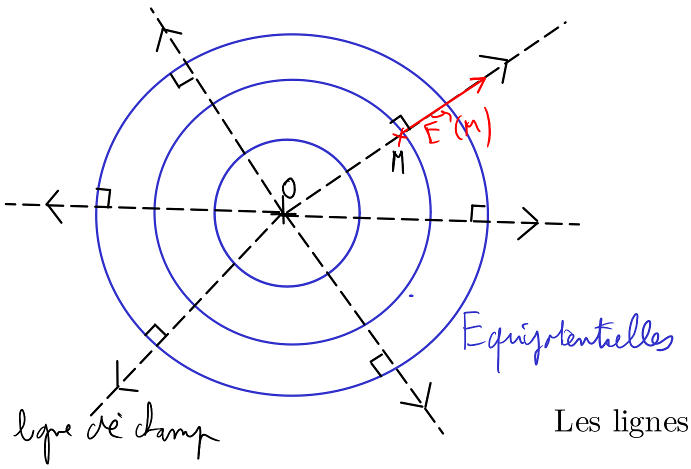
Une surface équipotentielle, et l'ensemble des points M ayant le même potentiel : V(M)=cte

- Propriété : les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles

Montrons le. Lors d'un petit déplacement , on a $dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \vec{dl}$

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, donc $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$. Lors d'un déplacement $\vec{dl}$ orthogonal à $\vec{E}$, nous avons $\vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ donc $dV = 0$ donc $V = cte$ pour tout déplacement $\perp$ à $\vec{E}$

Exemple : la charge ponctuelle +q placée en O



- $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ est radial.

Les lignes de champ sont donc des rayons.

- $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad V(M) = cte \Leftrightarrow r = cte$

Les équipotentielles sont donc des sphères

Les lignes de champ sont donc bien perpendiculaires aux équipotentielles

4) Équation de Poisson

On a $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Or, $\exists V$, $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ donc $\mathrm{div}(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

soit $\boxed{\Delta(V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ C'est l'équation de Poisson

S'il n'y a pas de charges: $\rho = 0$ et donc :

$\boxed{\Delta(V) = 0 \quad (\rho = 0)}$ C'est l'équation de Laplace (sans charges)

Rappel : Δ est l'opérateur Laplacien : $\Delta \ldots = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} \ldots)$

III) Le théorème de Gauss

1) Énoncé du théorème de Gauss en électrostatique

La deuxième méthode pour calculer le champ $\vec{E}$ consiste à utiliser l'équation de Maxwell Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (locale)

Cette équation a un équivalent global (ou intégral).

Soit V un volume délimité par une surface S fermée, et intégrons cette équation de MG sur ce volume :

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV$$

th. de Green Ostrogradski

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\,Q_{int\,à\,V}$$

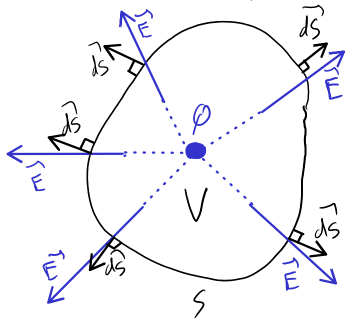
Nous obtenons ainsi le théorème de Gauss :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Q_{int} est la charge à l'intérieur de $S_{fermée}$

Illustration :

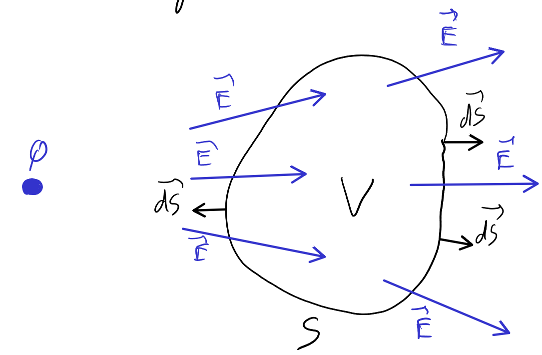
Cas d'une charge q à l'intérieur



Ici $Q_{int} = q$ donc $\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} \neq 0$

Effectivement, le champ $\vec{E}$ diverge de la charge et sort de V. Le flux de $\vec{E}$ est donc positif.

Cas d'une charge q à l'extérieur



Ici $Q_{int} = 0$ donc $\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$

Le flux de $\vec{E}$ est nul, ce qui ne veut pas dire que $\vec{E}$ est nul !

Le flux entre du coté gauche (flux négatif car $\vec{E}\cdot\vec{dS} < 0$) et sort du coté droit (flux positif) $\rightsquigarrow$ le flux total est nul.

2) Énoncé du théorème de Gauss en mécanique.

Il existe aussi un théorème de Gauss en mécanique

Pour l'obtenir, nous allons nous appuyer sur les analogies des forces de Newton et de Coulomb :

Mécanique : force de Newton	Électrostatique : force de Coulomb
$\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m\,m'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$\vec{F} = \dfrac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$
et $\vec{F} = m'\,\vec{g}(M)$	$\vec{F} = q'\,\vec{E}(M)$
donc : $\mathcal{G}$ $\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
m $\longleftrightarrow$	q
Champs : $\vec{g}(M)$ $\longleftrightarrow$	$\vec{E}(M)$

Le théorème de Gauss peut donc se transposer de l'électrostatique vers la mécanique :

$$\boxed{\oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}} \longleftrightarrow \boxed{\oint_S \vec{g}.\vec{dS} = -4\pi\mathcal{G}\,M_{int}} \qquad \underline{\text{Globales}}$$

et :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \operatorname{div}\vec{g} = -4\pi\mathcal{G}\,\rho_m \qquad \underline{\text{Locales}}$$

ρ_m = masse volumique

3) Exemples de calculs de champ $\vec{E}$.

L'utilisation du théorème de Gauss est très simplificateur quand il y a beaucoup de symétries.

Méthode pour calculer un champ $\vec{E}$:

1. Etude des symétries et des invariances pour connaître la direction et la dépendance de $\vec{E}(M)$
2. Choix de la surface de Gauss en cohérence avec les symétries
3. Application du théorème de Gauss pour en déduire $\vec{E}$

a) La sphère uniformément chargée

Exemple traité en classe

b) Le cylindre indéfini uniformément chargé

Exemple traité en classe

c) Le plan indéfini uniformément chargé en surface

Exemple traité en classe

Bientôt la suite ici !