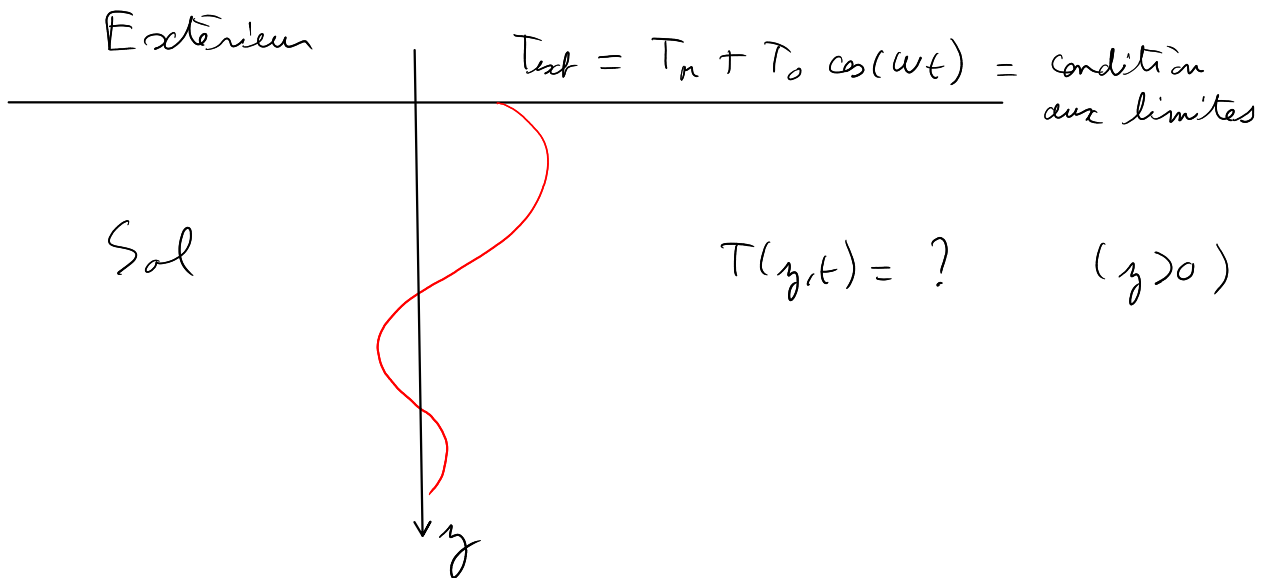


Dispersion et absorption d'une onde

I) Retour sur l'onde thermique et généralisation

Rappel : Nous avons étudié la "propagation" (ou plutôt la diffusion)

d'une onde thermique dans le sol



Méthode de résolution :

Nous avons l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ (1) (dans \mathbb{C})

Nous recherchons une solution de la forme

$$\underline{T}(y, t) = \underbrace{T_n}_A + \underbrace{T_0}_B e^{j(\omega t - \underline{g} y)} \quad \text{avec } \underline{g} \in \mathbb{C}!$$

Elle doit vérifier : \rightarrow la CL ce qui nous donne A et B

\rightarrow l'équation de diffusion

La solution recherchée $\underline{T}(y, t)$ est de la forme

$e^{j(\omega t - \underline{g} y)}$ avec $\underline{g} \in \mathbb{C}$ que l'on appelle pseudo-OPPH
 \hookrightarrow pseudo-OPPH

$\underline{T}(z,t)$ est injectée dans (1), ce qui donne :

$$j\omega_0 T_0 e^{i(\omega t - \underline{g}z)} = D_F (-j\underline{g})^2 T_0 e^{i(\omega t - \underline{g}z)}$$

tt
tz

donc $j\omega = -\underline{g}^2 D_F$ soit $\underline{g} = \pm \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D_F}}$

donc $\underline{g} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2D_F}{\omega}}$

Nous avons aussi vu que la seule solution physiquement acceptable est :

$$\underline{g} = \oplus \frac{1-j}{\delta}$$

On a donc : $\underline{T} = T_m + T_0 e^{i(\omega t - \frac{1-j}{\delta}z)}$
 $= T_m + T_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$

Dans $\mathbb{R} = T(z,t) - T_m = T_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$

T moyenne

Atténuation
de l'onde
=
Absorption

Partie propagative

Remarque : $\underline{g} = -\left(\frac{1-j}{\delta}\right)$ aurait donné :

$$T(z,t) - T_m = T_0 e^{+\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + \frac{z}{\delta})$$

divergent
= Absurde !

se propage à l'envers
= impossible

Généralisation :

Pour une équation de propagation qui n'est pas nécessairement une équation de d'Alembert : on propose des solutions de la forme pseudo-OPPH :

$$\underline{A} e^{j(\omega t - \underline{k} x)} \quad \text{avec } \underline{k} \in \mathbb{C}$$

On injecte cette solution dans l'équation de propagation pour vérifier à quelle condition sur k elle convient.

On trouve :

$$\underline{k} = k' - j k''$$

$$k' = \text{Re}(k) \\ -k'' = \text{Im}(k)$$

Remarque : on a vu que la seule solution physiquement acceptable est :

$\text{Re}(k) > 0$: Propagation dans le bon sens

$\text{Im}(k) < 0$: Atténuation / absorption

En repassant en réel, on a :

$$A e^{j(\omega t - \underline{k} x)} = A e^{j(\omega t - k' x + j k'' x)} \\ = A e^{-k'' x} e^{j(\omega t - k' x)}$$

soit dans TR :

$$A e^{-k'' x} \cos(\omega t - k' x)$$

Atténuation

donnée par $k'' = -\text{Im}(k)$

Propagation

donnée par $k' = \text{Re}(k)$

- L'atténuation est $e^{-\frac{z''}{\delta}} = e^{-\frac{z}{\delta}}$ avec $\delta = \frac{1}{z''}$
↙ ↘
diminution de
l'amplitude

δ est la longueur caractéristique d'absorption

Au bout de 4 à 5 δ , l'onde a quasi-disparue

- La vitesse de phase est donnée par :

$$\omega t - z' y = \varphi = \text{cte} \quad \text{donc } y = -\frac{\text{cte}}{z'} + \underbrace{\left(\frac{\omega}{z'}\right)}_{v_\varphi} t$$

donc

$$\delta_{\text{caractéristique}} = \frac{1}{z''}$$

$|Im(z)|$

δ distance caractéristique d'absorption

et

$$v_\varphi = \frac{\omega}{z'}$$

v_φ Vitesse de phase

$Re(z)$

Retour sur l'onde thermique :

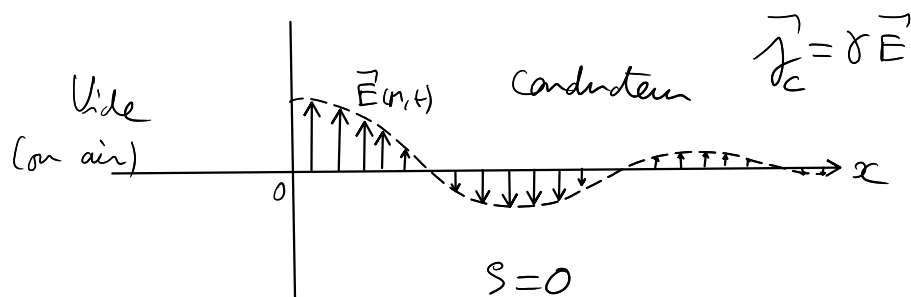
$$\delta = \sqrt{\frac{2D_p}{\omega}}$$

et
$$v_\varphi = \frac{\omega}{z'} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega}{2D_p}}} = \sqrt{2D_p \omega} \rightarrow v_\varphi \text{ dépend de } \omega!$$

Ce n'est pas une constante :
elle dépend de la fréquence

Il y a **dispersion** : les ondes de différentes fréquences ont des vitesses de phase différentes

II) Onde électromagnétique plane dans un conducteur réel



Rappel : dans un conducteur, il n'y a pas d'excès de charges : $S=0$

Par contre, le conducteur étant réel : $\sigma \neq \infty$. Il peut donc y avoir un courant \vec{j} et un champ \vec{E} (et \vec{B})

Dans un conducteur, on peut généralement faire l'ARQS :

$$\underbrace{\sigma E}_{j_c} \gg \underbrace{\epsilon \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}}_{j_d}$$

On part des 4 équations de Maxwell : (simplifiées)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{S}{\epsilon} \quad 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ARQS

Pour obtenir une équation de propagation sur \vec{E} On part de :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{0} - \Delta \vec{E}$$

Th de Schwarz

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j}_c) = -\Delta \vec{E} \quad \text{or } \vec{j}_c = \delta \vec{E}$$

donc $\mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \vec{E}$ (3)

C'est une équation de diffusion
(et non pas une équation de d'Alembert)

On propose une solution de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{\beta} x + \varphi)} \quad \text{avec } \underline{\beta} \in \mathbb{C}$$

que l'on injecte dans (3) :

$$\mu_0 \delta j \omega = (-j \underline{\beta})^2 \quad \text{soit } \underline{\beta}^2 = -j \mu_0 \delta \omega$$

$$\text{donc } \underline{\beta} = \pm \left(\frac{1-j}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \delta \omega} \quad \left. \vphantom{\underline{\beta}} \right\} \text{ le (+) est la seule solution physiquement acceptable}$$

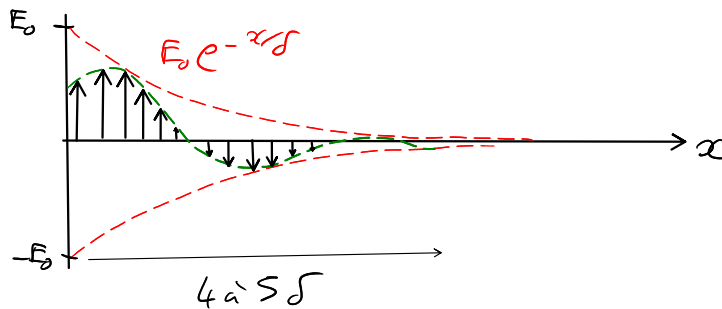
$$\underline{\beta} = \frac{1-j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \delta \omega}}$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} + j \frac{x}{\delta})} \\ &= \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(x) = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} + \alpha) \quad \text{dans TR}$$

↓ amplitude décroissante ↓ propagation



Ce phénomène s'appelle l'effet de peau

a) L'onde pénètre dans le conducteur à une profondeur de 4 à 5 δ , appelée :

- épaisseur de peau
- ou - profondeur de pénétration

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

A.N. dans le cuivre : $\sigma = 5.10^7 \text{ S/m}$

$$\left(d = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} \right)$$

Infrarouge $d = 30 \mu\text{m}$

$$\delta = 20 \text{ mm}$$

Micro-onde $d = 0,3 \text{ m}$

$$\delta = 2 \mu\text{m}$$

↑
très petite, d'où le terme de "peau".

→ L'onde pénètre très peu dans un conducteur

Si $\sigma \rightarrow \infty$: conducteur idéal : on retrouve $\delta \rightarrow 0$

L'onde ne pénètre pas du tout dans un conducteur idéal.

On a alors $\vec{E} = \vec{0}$ partout dans le conducteur, hypothèse faite dans le chapitre précédent.

(l'onde est alors totalement réfléchie)

b) Et la dispersion ?

$$\cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \rightarrow v_{\phi} = \frac{\omega}{\frac{1}{\delta}} = \frac{\omega}{1/\delta} = \omega \delta$$

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \delta}}$$

v_{ϕ} dépend de ω !

Chaque fréquence avance à une vitesse de phase différente :
il y a dispersion

Remarques : Pour une pseudo-OPPH de la forme

$$A e^{i(\omega t - \underline{g} z)}$$

Dans \mathcal{C}

$$\frac{\partial}{\partial t} \dots \rightarrow \times j\omega$$

$$\vec{v} = \frac{\partial}{\partial z} \dots \vec{u}_z = -j\underline{g} \vec{e}_z$$

$$\Delta = \nabla^2 = \times (-j\underline{g})^2$$

De plus, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

toujours valable ici, donc :

$$-j\underline{g} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

soit

$$\vec{B} = \frac{\underline{g} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

dans \mathcal{C} (idem OPPH)

par contre, on ne peut pas l'écrire dans \mathcal{R} car \underline{k} est complexe ici !

• (4) : $\underline{g}^2 = -j\mu_0 \nabla \omega$

relie \underline{k} à ω : elle est appelée

la relation de dispersion.

III) Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

1) Le modèle du plasma

Un plasma est un gaz ionisé, globalement neutre, et composé d'ions i de masse M_i et d'électrons de masse $m \ll M_i$ et de charge $(-e)$

Exemple : L'ionosphère, partie de l'atmosphère située à plus de 80 km d'altitude, est un plasma

→ Comment l'ionosphère affecte les ondes électromagnétiques ?

↳ il faut trouver une équation de propagation pour répondre à cette question

Hypothèses du modèle :

$$\bullet \quad \rho = \rho^+ + \rho^- = 0$$

ions + électrons
(cations) et ions - (anions)

• Les particules sont soumises à l'onde électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ donc à la force de Lorentz :

$$\text{donc} \quad \begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} & \text{pour les électrons} \\ M_i \frac{d\vec{v}}{dt} = q_i\vec{E} + q_i\vec{v} \wedge \vec{B} & \text{pour les ions} \end{cases}$$

Comme $M_i \gg m$, les ions bougent très peu comparativement aux électrons.

On suppose donc que les électrons bougent, mais que les ions bougent peu (restent quasi-immobiles) car ils sont beaucoup plus lourds.

- le poids est négligeable comparé à la force de Lorentz
- les ions ne sont pas pris en compte car le milieu est très peu dense (contrairement aux conducteurs ohmiques)

On recherche une solution de type onde pseudo-OPPH, de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 \in \mathbb{C}$$

2) Les équations de base

Comme les charges sont libres de bouger et sont soumises à un champ électrique, il y a apparition d'un courant de densité \vec{j}_v dont il faut tenir compte dans les équations de Maxwell. Seul le mouvement des électrons de charge (-e) est pris en compte.

Le courant volumique est donc :

$$\vec{j}_v = \sum_{\text{mobiles}} \vec{v} = N(-e) \vec{v}$$

↑ nombre d'électrons mobiles par volume
 ↑ vitesse moyenne des électrons mobiles

Équations de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (\rho_{\text{ext}} = 0) \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Remarque : il y a un courant \vec{j}_v non nul ($\vec{j}_v \neq 0$)

Par contre l'ARQS n'est pas justifiée, car le plasma n'est pas forcément un bon conducteur

3) La densité de courant dans le plasma

Avant de combiner les équations de Maxwell pour obtenir une équation de propagation,

il faut chercher ce que vaut \vec{j}_V . On a vu : $\vec{j}_V = -Ne \vec{v}$

mais que vaut \vec{v} ?

\vec{v} est la vitesse des électrons, mis en mouvement par la présence de \vec{E} et \vec{B}

Pour exprimer \vec{v} en fonction de \vec{E} et \vec{B} , on peut appliquer le PFD à l'électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } q = -e$$

Remarque : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}y)}$

et $\vec{v} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc $\vec{B} = \frac{\frac{\omega}{c} \wedge \vec{E}}{\omega}$ (pseudo OPPH)

$$B_0 = \|\vec{B}\| = \frac{\|\frac{\omega}{c} \times \|\vec{E}\|\|}{\omega} = \frac{\frac{\omega}{c} E_0}{\omega} \simeq \frac{E_0}{c}$$

On n'a pas $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{c}$! car l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert,

mais on admet que $\frac{\omega}{c}$ reste de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{c}$

Montrons alors que la force magnétique ($q\vec{v} \wedge \vec{B}$) est négligeable devant la force électrique

$$\frac{q \|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{q \|\vec{E}\|} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{v B_0}{E_0} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{v}{c} \ll 1$$

Si l'électron n'a pas une vitesse relativiste, $v \ll c$
 (électron) (3.10⁸ m/s)

alors la force $q\vec{E}$ prédomine largement sur $q\vec{v} \wedge \vec{B}$

donc : PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$

Dans $\mathbb{C} =$ (*) $\rightarrow m j\omega \vec{v} = q\vec{E}$

donc $\vec{v} = \frac{q}{jm\omega} \vec{E} = -\frac{e}{j\omega m} \vec{E}$

(*) vrai car si \vec{E} est oscillant, alors \vec{v} sera oscillant aussi, donc sera en $e^{j\omega t}$

Or $\vec{J}_v = -Ne\vec{v}$ donc

$$\vec{J}_v = -j \frac{Ne^2}{m\omega} \vec{E}$$

conductivité
complexe

4) La relation de dispersion

On part de $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) :$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\vec{\text{rot}}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0 - \Delta \vec{E}$$

th de Schwarz

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{J}_v + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\Delta \vec{E}$$

$$-j\omega(\mu_0(-\frac{jNe^2}{m\omega})\vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E}) = -\epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

dans \mathbb{C}
(prendre OPPM)

soit $-\frac{\mu_0 Ne^2}{m} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = \omega^2 \epsilon_0$ en simplifiant par \vec{E}

$\rightarrow 1/c^2$

sait $\underline{g}^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{Ne^2}{m} \right)$ car $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\underline{g}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m \omega^2} \right) \quad \text{noté } \omega_p^2$$

$$\underline{g}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

en notant

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 Ne^2 c^2}{m}$$

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m \epsilon_0}$$

constante

Relation de dispersion du plasma

5) Interprétation de la relation de dispersion

$$\left(\begin{array}{l} \text{si } \omega > \omega_p : \quad \underline{\underline{\epsilon}}^2 = \text{réel positif} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{réel} \\ \text{si } \omega < \omega_p : \quad \underline{\underline{\epsilon}}^2 = \text{réel négatif} \rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{imaginaire pur !} \end{array} \right.$$

$$\underline{\text{cas } \omega > \omega_p} : \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (\underline{k} \text{ est réel})$$

$$\underline{\underline{\vec{E}}} = \underline{\underline{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\underline{\epsilon}} y)} \quad (\underline{k} \text{ réel})$$

$$\underline{\underline{\vec{E}}_{\text{réel}}} = \underline{\underline{E}}_0 \cos(\omega t - \underline{\underline{\epsilon}} y)$$

L'onde se propage dans le sens des z croissants sans s'atténuer (car $\text{Im}(\underline{k}) = 0$)

↑
Absorption

D'autre part :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\underline{\underline{\epsilon}}} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$\boxed{v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$$

$v_\phi > c$! \rightarrow ce n'est pas un problème, car v_ϕ ne représente pas la vitesse de la matière, ni celle de l'énergie

\rightarrow v_ϕ n'est pas constante égale à c, mais dépend de ω !

Le plasma est dispersif

chaque fréquence avance à une vitesse de phase différente

Cas $\omega < \omega_p$

$$\epsilon^2 < 0$$

donc ϵ imaginaire pur

donc $\epsilon = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ note $(-j\epsilon'')$
↑
imaginaire pur

le (-) est la seule solution physiquement acceptable ($\text{Im}(\epsilon) < 0$)
car sinon la solution diverge.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{j(\omega t - (-j\epsilon''y))} \\ &= \vec{E}_0 e^{j\omega t} e^{-\epsilon''y} \quad \mathbb{C} \end{aligned}$$

soit $\vec{E}_{\text{réel}} = \vec{E}_0 \cos \omega t e^{-\epsilon''y} \quad \mathbb{R}$

Aucune propagation
car pas de $(\omega t - \epsilon' y)$

tend vers 0 rapidement à 4 à 5 δ
($\delta = \frac{1}{\epsilon''}$)

On dit que l'onde est évanescence

Une onde évanescence a une amplitude en décroissance exponentielle sans se propager

$$\delta = \frac{1}{\epsilon''} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

δ est la profondeur de pénétration de l'onde

A ajouter : \Rightarrow calcul de $\langle \Pi \rangle = 0$
 \rightarrow effectuer un tracé de \vec{E} à divers t
 \rightarrow parler de la réflexion totale

Conclusion ; Le plasma joue le rôle d'un filtre passe-haut

Les pulsations inférieures à ω_p ne peuvent pas traverser le plasma

Il faut donc choisir des pulsations supérieures à ω_p pour les communications entre le sol et le satellite.

A compléter :

⊗ Faire 1 AN de ω_p ($\rightarrow d_{\text{compo}} = 1 \text{ MHz}$)
et représentation du spectre.

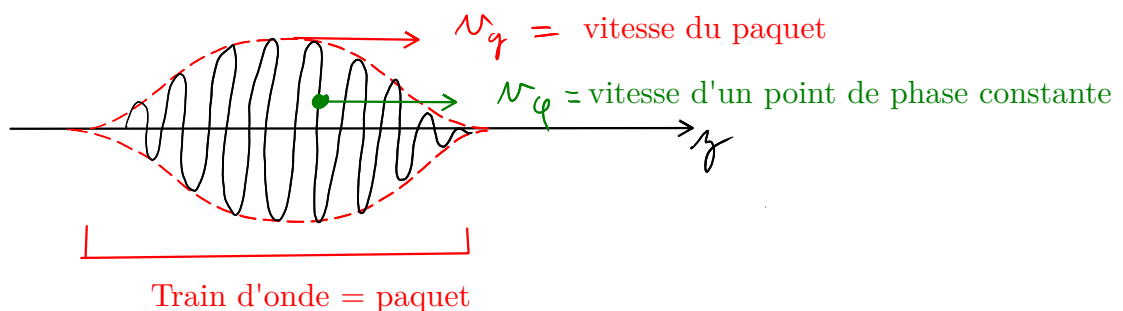
en TD ?

⊗ Paire de l'expérience de Marconi en 1901 et 1908

IV) Vitesse de phase et vitesse de groupe

1) Notion de paquet d'onde

En réalité, l'onde est limitée dans l'espace et le temps : elle commence à un moment, et se termine ensuite. On utilisera plutôt une modélisation en train d'onde, ou paquet d'onde comme sur la représentation ci-dessous :



2) Modélisation : exemple de la propagation de 2 OPPH

A compléter

3) Généralisation de la notion de paquet d'onde

Soit une pseudo-OPPH :

$$\underline{\hat{E}} = \underline{\hat{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\beta} z)} \quad \mathbb{C} \quad \text{avec } \underline{\beta} = \beta' - j\beta''$$

$$\underline{\hat{E}} = \underline{\hat{E}}_0 e^{-\beta'' z} \cos(\omega t - \beta' z) \quad \mathbb{R}$$

On a :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta'}$$

Vitesse de phase

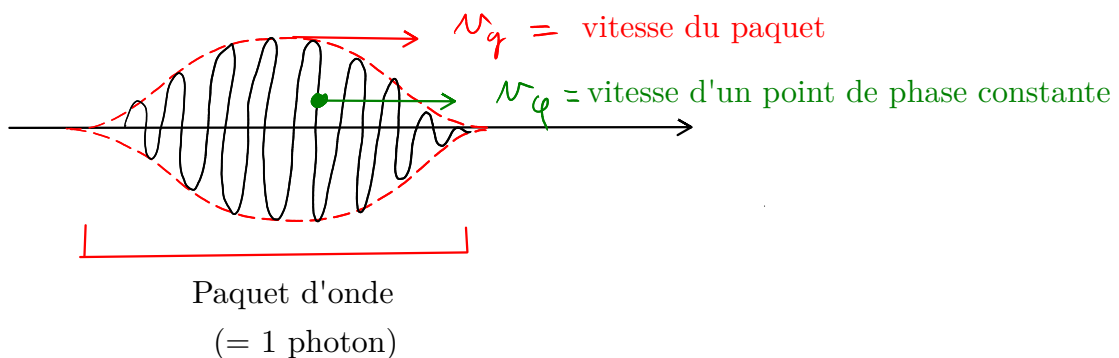
et

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta'}$$

$$(\beta' = \text{Re}(\underline{\beta}))$$

Vitesse de groupe (admis)

On admet que la vitesse de groupe
représente la vitesse de déplacement
de l'énergie



On peut avoir

$$v_\varphi \neq v_g$$

Comme un "tapis roulant" qui roule dans le paquet, le paquet avançant plus doucement (**voir animation**)

Exemples :

① Onde électromagnétique dans le vide

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)}$$

injecté dans l'équation de d'Alembert

donne : $\omega^2 = k^2 c^2$

donc $\omega = k c = \begin{cases} v_g = \frac{\omega}{k} = c \\ v_p = \frac{d\omega}{dk} = c \end{cases}$

Les vitesses de phase et de groupe (énergie) sont toutes deux égales à **une constante :**

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Il n'y a pas de dispersion dans le vide

② Onde dans le plasma

pour : $\omega > \omega_p$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad \text{soit} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad \text{relation de dispersion}$$

Le plus simple est de différencier cette équation de dispersion :

$$2k dk = \frac{1}{c^2} 2\omega d\omega \quad (\omega_p = \text{cte})$$

donc $\frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c^2$

soit

$$v_g \cdot v_p = c^2$$

Or $v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

donc

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

normal ! c'est la vitesse de l'énergie !