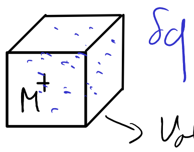
Transport de charges électriques

I) Distributions de charges électriques

1) Distribution volumique

Les charges sont quantifiées : électrons, ions,...

Quand il y en a un très grand nombre, on considère un modèle continu (échelle mésoscopique)



Volume $d\tau$ de taille mésoscopique

$$\boxed{\rho(M) = \frac{\delta q}{d\tau}}$$

densité volumique de charge en $C.m^{-3}$

Remarque : $\rho(M,t)$ est un champ scalaire

S'il n'y a qu'une seule sorte de charge q, avec δN charges dans $d\tau$:

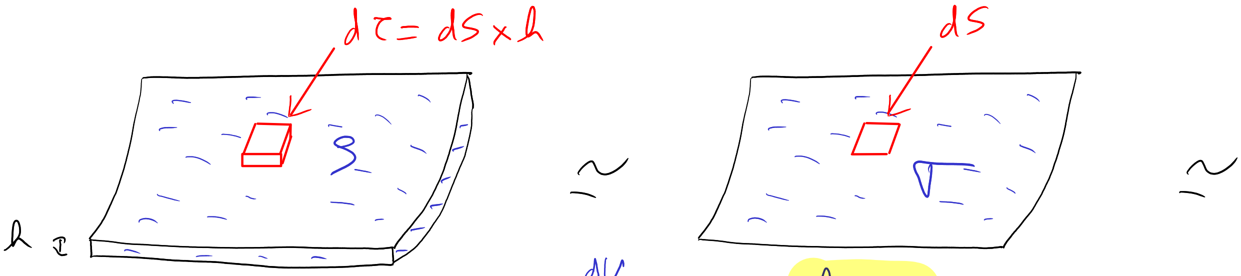
$$\rho(M) = \frac{\delta N . q}{d\tau} \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho(M) = n(M) \times q}$$

avec $\boxed{n = \frac{\delta N}{d\tau}}$ densité de charge

2) Densité surfacique et linéique

Surfacique :

Si les charges sont réparties en surface (sur une très faible épaisseur h)

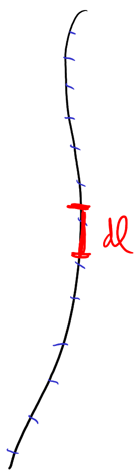


$h \to 0$

$$\delta q = \underbrace{\rho \times \overbrace{h}}\overbrace{\times dS}^{dV} = \sigma \times dS \qquad \text{avec } \sigma = \rho \times h$$

donc $\boxed{\sigma = \dfrac{\delta q}{dS}}$ Densité de charge surfacique en C/m^2

Linéique :



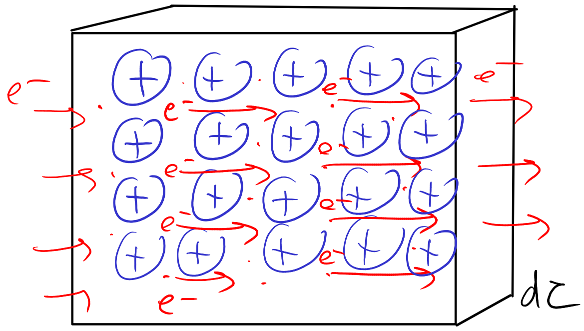
$$\delta q = \lambda \times dl$$

$\boxed{\lambda = \dfrac{\delta q}{dl}}$ Densité linéique de charge en C/m

II) Densité de courant électrique

1) Type de charge et courant électrique

Il y a divers types de charges : les charges fixes et les charges mobiles



Exemple du cuivre métal :

(+) = Cu^+ fixe (réseau cristallin)

e^- = électron de conduction ↳ mobile.

Quand les charges se déplacent, il y a un courant électrique

On peut avoir un milieu globalement neutre et avoir un courant électrique.

Dans l'exemple ci dessus : les Cu^+ restent fixes, et les e^- sont mobiles. Le volume reste globalement neutre : les e^- sortants du volume par la droite sont remplacés par des nouveaux qui arrivent par la gauche.

L'intensité du courant électrique est la charge qui traverse un section S du fil par unité de temps

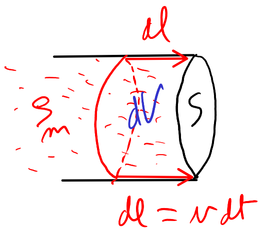
Fil électrique

$$\boxed{i = \frac{\delta q}{dt}}$$

$C = A/s$

Remarque : si des charges q se déplacent à la vitesse moyenne v,

soit n la densité de ces charges



Pendant dt, les charges se déplacent de dl = v.dt

donc les charges se trouvant dans le volume : $dV = S \times v.dt$

vont traverser la section S

Soit ρ_m la densité de charges mobiles

Pendant une durée dt, il y a donc la charge $\delta q = \rho_{mobile} \times S v \, dt$ qui traverse S, et donc :

$$\frac{\delta q}{dt} = \boxed{\rho_m . S . v = i}$$

2) Densité volumique de courant

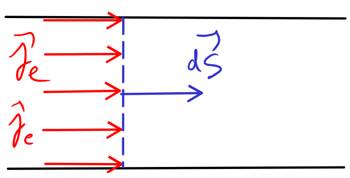
Définition : Soit $\vec{j_e}$ le vecteur densité volumique de courant avec :

$\vec{j_e}$:
- $\|\vec{j_e}\| =$ Charge traversant une unité de surface par unité de temps
- Sens et direction de $\vec{j_e}$ = sens et direction de déplacement des charges (positives)

On a donc $\boxed{i = \iint_S \vec{j_e} \cdot \vec{dS}}$

j_e en $C\,m^{-2}\,s^{-1}$
$= A.m^{-2}$

Si $\vec{dS} \,//\, \vec{j_e}$ et $\vec{j_e}$ uniforme : $\boxed{i = j_e \times S}$



Fil électrique

Si ce sont des charges q de densité n se déplaçant à la vitesse v, nous avons vu que :

$i = \rho_m S v$ or $i = j_e . S$ donc $j_e = \rho_m v$

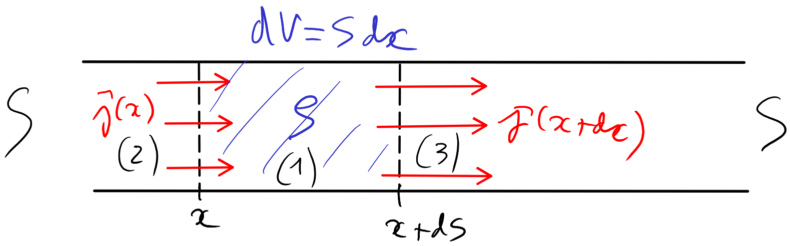
soit $\boxed{\vec{j_e} = \rho_m \vec{v}}$

III) Bilan de charge électrique

1) Équation bilan de charge électrique

Variation de charge dans un volume dV par unité de temps $=$ Charges entrantes par unité de temps $-$ Charges sortantes par unité de temps

(1) (2) (3)



(1) ? Charge dans dV : $\delta q = \rho\, dV = \rho(x,t) \times S \times dx$

$$(1) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta q) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,t) . S . dx\right) = \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} . S . dx$$

$$(2) = j(x) \times S$$

$$(3) = j(x+dx) \times S$$

$$(1) = (2) - (3)$$

donc $$\frac{\partial \rho}{\partial t} \times S \times dx = j(x) . S - j(x+dx) \times S$$

soit $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = - \frac{j(x+dx) - j(x)}{dx}$$

En faisant tendre $dx \to 0$:

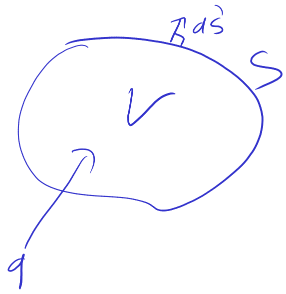
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial x}}$$

Loi locale de conservation de la charge 1D

Généralisation à 3D : $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}}$ Loi locale de conservation de la charge 3D

Parler de la loi globale de conservation de la charge

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \oiint_S \vec{j_e} \cdot d\vec{S}$$



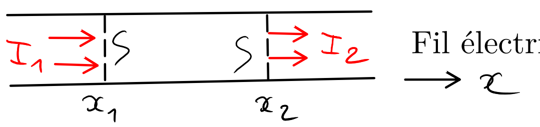
Analogies :

	Diffusion de particules	Transport de charges	Conduction thermique
Bilan 1D	$\dfrac{\partial N}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_m}{\partial x}$	$\dfrac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_e}{\partial t}$	$\rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}$
Flux de $\vec{j}$ à travers S	$\phi = \iint_S \vec{j_m} \cdot d\vec{S}$ Flux particulaire	$I = \iint_S \vec{j_e} \cdot d\vec{S}$ courant électrique	$\mathcal{P}_{th} = \iint \vec{j_{th}} \cdot d\vec{S}$ Puissance thermique

2) Cas du régime stationnaire

A 1D, en régime stationnaire :

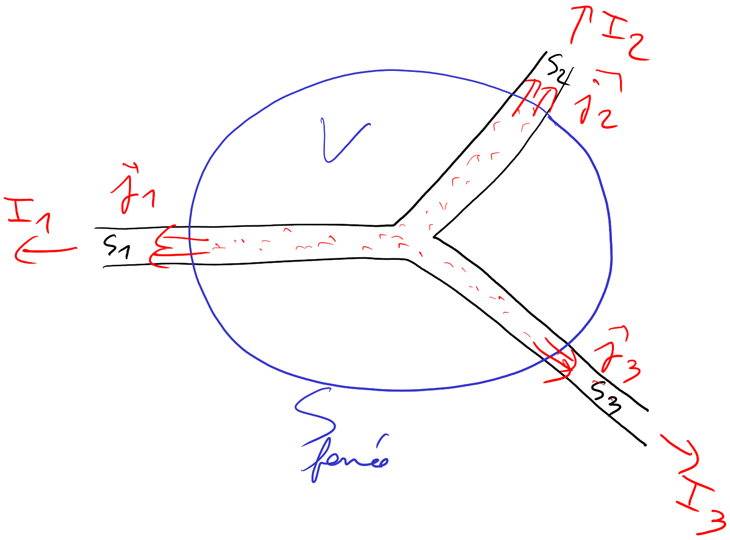
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad j(x) = \text{cte}$$



Or $S = \text{cte}$ donc $i = \text{cte}$ $\quad i_1 = i_2$

• 3D $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\vec{j}=0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{j}\cdot dV=0$

th de Green



soit $\oiint \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$

donc $j_1S_1+j_2S_2+j_3S_3=0$

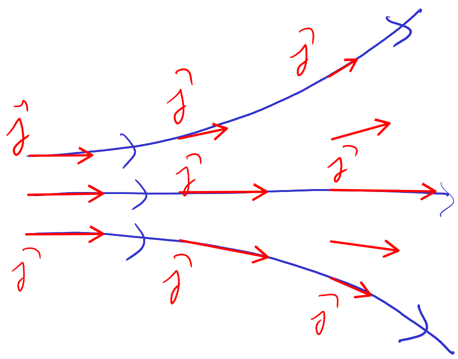
soit $I_1+I_2+I_3=0$

Loi des nœuds

Valable si la charge totale q dans V reste constante

Définitions

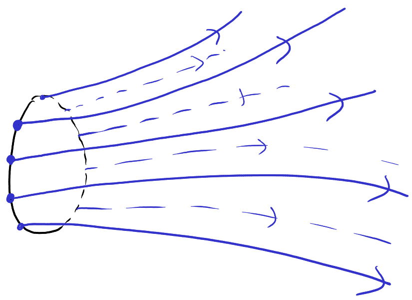
• Ligne de courant : ligne le long de laquelle, en tout point : $\vec{dl} \,/\!/\, \vec{j}$



une ligne de courant est une courbe de l'espace qui possède en tout point une tangente parallèle au vecteur $\vec{j}$

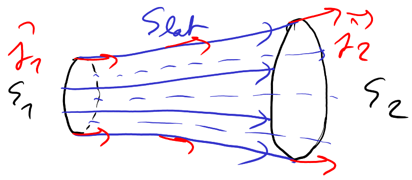
Ces lignes sont orientées dans le sens de $\vec{j}$

• Tube de courant : ensemble des lignes s'appuyant sur un contour φ



Application : Considérons un tube de courant, fermé à l'entrée par une surface S_1

et en sortie par une surface S_2



$$S_{fermé} = S_1 + S_{lat} + S_2$$

$$\oiint_{S_{fermé}} \vec{j} \cdot \vec{dS} = 0$$ à travers la surface fermée

Or le flux de $\vec{j}$ est nul à travers S_{lat} , donc (si j uniforme sur une section) :

$$j_1 S_1 + 0 + j_2 S_2 = 0 \quad \text{donc} \quad |j_1 S_1| = |j_2 S_2|$$

Si les lignes s'écartent, S augmente, donc j diminue

(Idem rivière avec v en mécanique des fluides)

IV) Conducteur ohmique

1) La loi d'ohm locale

Dans les milieux conducteurs (métaux...) on constate que $\vec{j}_e$ est proportionnel à $\vec{E}$

$\vec{E}$ met en mouvement les charges avec la force $q\vec{E}$ => courant proportionnel à $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$$ Loi d'ohm locale

γ = Conductivité du milieu

Exemple : Cuivre $\gamma \simeq 10^7 \ S.m^{-1}$

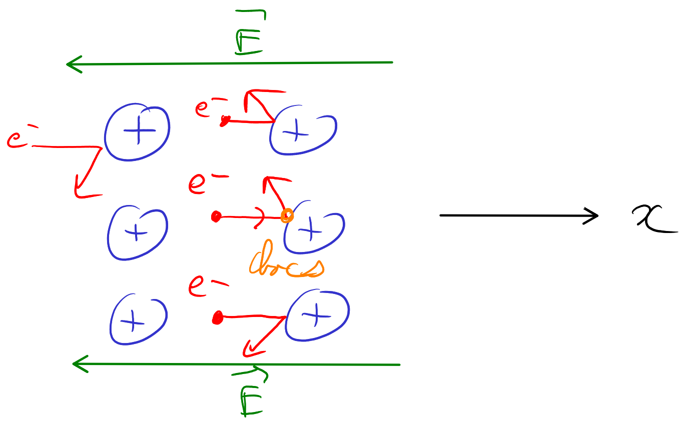
2) Modèle de Drude

On considère une particule de charge q, de masse m, se déplaçant sous l'effet d'un champ électrique $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ constant et uniforme

→ Il est soumis à la force : $\vec{F}_e = q\vec{E}$

→ Il se déplace dans un milieu matériel et subit donc des chocs, assimilés à des frottements :

$$\vec{F}_f = -k\vec{v}$$



Appliquons le PFD à la particule :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{v}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = qE_0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \frac{qE_0}{m}$$

On se limite à un déplacement 1D selon $\vec{u}_x$

Solution : $v = \frac{qE_0}{m} + A e^{-t/\tau_0}$ avec $\tau = \frac{m}{k}$

$$v \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{q}{k}E_0$$

Au bout de 4 à 5 τ

Vitesse du régime établi

Soit $\boxed{\vec{v}_\infty = \mu\vec{E}}$ avec $\boxed{\mu = \frac{q}{k} = \frac{q\tau}{m}}$ Mobilité du porteur

Or $\vec{j} = n q \vec{v}$

Donc $\vec{j} = n \frac{q^2}{k} E_0 \vec{u}_x$ en régime stationnaire

Or $\tau = \frac{m}{k}$ soit $k = \frac{m}{\tau}$

donc $\vec{j} = \frac{n q^2 \tau}{m} E_0 \vec{u}_x$ soit $\boxed{\vec{j} = \left(\frac{n q^2 \tau}{m}\right) \vec{E}}$

Est de la forme $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\gamma = \frac{n q^2 \tau}{m}$

Loi d'ohm locale

OG = Métal La particule mobile est l'électron

$$m_{e^-} = 9,1 . 10^{-31} \text{ kg}$$

$$q = -1,6 . 10^{-19} \text{ C}$$

$$n_{e^-} \simeq 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

$$\gamma \simeq 10^{-7} \text{ S.m}^{-1}$$ (pour le cuivre)

On $\gamma = \frac{n q^2 \tau}{m}$ donc $\tau = \frac{m \gamma}{n q^2} \sim 10^{-14}$ s !

Le régime transitoire est d'une durée de l'ordre de 10^{-14} s ce qui représente aussi le temps moyen entre 2 chocs.

Court !