Systèmes linéaires et stabilité

Chapitre de révisions (sauf la partie stabilité)

I) Le système linéaire continu invariant (LCI)

1) Définitions

Soit un système (électrique, mécanique, ...) qui donne une sortie s(t) à une entrée e(t)

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système L C I}} \longrightarrow s(t)$$

L - Linéaire : si $\begin{cases} e_1(t) \xrightarrow{\text{donne}} s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{cases}$

alors $\alpha\, e_1(t) + \mu\, e_2(t) \longrightarrow \alpha\, s_1(t) + \mu\, s_2(t)$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R})$

C - Continu : Un système est dit continu si les variations des grandeurs le caractérisant sont des fonctions de type f(t) avec t une variable continue

On l'oppose généralement aux systèmes discrets, en particulier dans le domaine numérique

I - Invariant : Ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps

Si $e(t) \xrightarrow{\text{donne}} s(t)$

alors $e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)$ avec τ un temps

2) Propriétés

Soit un système signal sinusoïdal permanent en entrée :

$$e(t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{pulsation}} t + \varphi) \quad \text{phase}$$

Une propriété remarquable des systèmes L.C.I. est de donner en sortie un signal également sinusoïdal et de même pulsation ω

On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes L.C.I.

Isomorphe : le signal a la même forme en entrée et en sortie

Donc la sortie s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \underbrace{S_0}_{?} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{idem } e(t)} t + \underbrace{\varphi'}_{?})$$

$\Rightarrow$ Pour un signal sinusoïdal permanent en entrée, la recherche de la réponse se résume donc à :

$\longrightarrow$ Rechercher S0 l'amplitude

$\longrightarrow$ Rechercher $(\varphi' - \varphi)$ le déphasage (ou φ')

Remarque : Si on excite un système avec un signal sinusoïdal de pulsation ω en entrée et que la réponse en sortie est non sinusoïdale ou sinusoïdale de pulsation ω' différente : alors le système est non linéaire

II) La fonction de transfert

1) La fonction de transfert (ou transmittance)

On se place ici en régime sinusoïdal permanent

- Rappel des notations complexes :

Dans $\mathbb{R}$ | Dans $\mathbb{C}$

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{e} = \underbrace{E_0 e^{j\varphi}} e^{j\omega t} = \underline{E} \, e^{j\omega t}$$

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi') \longrightarrow \underline{s} = \underbrace{S_0 \, e^{j\varphi'}} e^{j\omega t} = \underline{S} \, e^{j\omega t}$$

On a $\quad e(t) = \mathrm{Re}(\underline{e}) \qquad \underline{E} = E_0 e^{j\varphi}$

$\qquad\quad s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s}) \qquad \underline{S} = S_0 \, e^{j\varphi'}$

- Définition de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0 e^{j\varphi'} \cancel{e^{j\omega t}}}{E_0 \, e^{j\varphi} \cancel{e^{j\omega t}}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} \, e^{j(\varphi' - \varphi)}$$

Pour obtenir le signal de sortie réponse de e(t) sinusoïdal permanent, il suffit de connaître $\underline{H}(j\omega)$:

$$\begin{cases} \to |\underline{H}| = \dfrac{S_0}{E_0} & \text{rapport des amplitudes appelé gain G} \\ \to \mathrm{Arg}(\underline{H}) = \varphi' - \varphi & \text{avance de phase du signal de sortie sur le signal d'entrée appelé déphasage} \end{cases}$$

Le signal de sortie est alors (dans $\mathbb{R}$) :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi')$$
$$= E_0 \, |\underline{H}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi + \arg(\underline{H}(j\omega)))$$

2) Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

En électricité, on peut associer des résistances R, des bobines L, des condensateurs C.

Les courants i et tensions u sont alors reliées entre elles par des relations différentielles linéaires :

$$u = Ri \quad ; \quad u = L\frac{di}{dt} \quad ; \quad i = C\frac{du}{dt} \quad , \ldots$$

En les associants, on peut trouver une équation différentielle reliant e(t) à s(t) à l'aide de la loi des noeuds et de la loi des mailles :

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \cdots + b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = a_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \qquad (1)$$

L'ordre du filtre est n ($n \geqslant m$ admis)

Remarque : Un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants est L.C.I.

- Pour un signal sinusoïdal permanent :

Plaçons nous dans $\mathbb{C}$:

$$\underline{e} = E_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \qquad \frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega \times \underline{e}$$

donc $\boxed{\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega}$ dans $\mathbb{C}$

D'où :

- Pour une bobine : $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} \rightarrow \underline{u} = Lj\omega\,\underline{i}$

  $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = jL\omega$

- Pour un condensateur : $\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} \rightarrow \underline{i} = Cj\omega\,\underline{u}$

  $\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

L'équation (1) peut donc s'écrire dans $\mathbb{C}$

$$b_0 \underline{s}(t) + b_1 \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\underline{s}(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m\underline{s}(t)}{dt^m} = a_0 \underline{e}(t) + b_1 \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m\underline{e}(t)}{dt^m} \qquad (2)$$

avec les b_i et les a_i réels (car $Re((2)) = (1)$)

soit $b_0 \underline{s} + b_1 j\omega \underline{s} + b_2 (j\omega)^2 \underline{s} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{s} = a_0 \underline{e} + a_1 j\omega \underline{e} + \dots + b_m (j\omega)^m \underline{e}$

soit, en factorisant par $\underline{s}$ et par $\underline{e}$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_m (j\omega)^m}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + \dots + b_m (j\omega)^m}$$

soit $$\boxed{\underline{H} = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (j\omega)^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}}$$

A l'ordre 2 (au programme) :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}}$$

$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}\right)$ sont réels

3) Notations de Laplace et transposition entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Notation de Laplace

$$P \xrightarrow{\mathbb{R}} \left[\frac{d}{dt}\right] \qquad P \xrightarrow{\mathbb{C}} \times j\omega$$

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{s}{e}$$

(a_i et b_i réels)

soit $[b_0 + b_1 p + b_2 p^2]\, s = [a_0 + a_1 p + a_2 p^2]\, e$

et donc $b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$

III) Stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

1) A partir de l'équation différentielle

(Partie rédigée en classe)