

Chapitre 2

Eléments de statique des fluides

Ce chapitre a pour objectif d'étudier la variation de pression dans un fluide au repos (liquide ou gaz) et placé sous l'influence de forces extérieures (en particulier la force de pesanteur).

2.1. La pression dans un fluide au repos

2.1.1. L'état fluide

La matière peut généralement être classée en différents états :

-L'état solide : tous les constituants de la matière ont une place déterminée et se contentent d'osciller autour de cette position d'équilibre ;

-L'état fluide : les particules se déplacent librement. On sépare généralement cet état en deux catégories suivant la densité du milieu :

-les liquides (milieu dense)

-les gaz (milieu peu dense, le vide y occupe une place importante).

Il faut noter toutefois que la distinction entre ces différents états ne peut pas toujours être effectuée clairement. Par exemple, le sable est-il fluide ou solide ? Le sable glisse entre les doigts et donc peut être considéré comme un fluide. Mais si on regarde les grains de plus près, on constate qu'ils sont solides. Il est également possible, sous certaines conditions de pression et de température, d'obtenir des fluides de densité moyenne, intermédiaires entre les liquides et les gaz.

Ce chapitre se limite à l'étude des milieux fluides.

2.1.2. Pression en un point du fluide

La pression qu'exerce un fluide sur une paroi a déjà été définie dans le premier chapitre de la thermodynamique. Il a été vu, par exemple, que pour les gaz parfaits, ce sont les chocs des particules sur la paroi qui sont responsables de la pression. L'objectif est ici de généraliser la définition de la pression **en tout point du fluide**.

On suppose que le milieu est en équilibre thermodynamique. Soit M un point de ce milieu dont on cherche à définir la pression. Le fluide est ensuite découpé en deux parties A et B dont la séparation passe par le point M . On supprime la matière du côté A tout en gardant la partie B inchangée. Il est alors nécessaire, pour empêcher les particules B de se déplacer du côté A par diffusion, d'appliquer une force tout le long de la séparation pour retenir les particules (par exemple en plaçant une paroi). Cette force à appliquer pour empêcher le gaz de partir du côté A est opposée à la force qu'applique B sur la paroi que l'on va noter \vec{df} . En notant dS le petit élément de séparation entourant le point M , cette force \vec{df} à appliquer sur dS est :

- proportionnelle à la surface dS ,
- dirigée vers A (vers l'extérieur),
- portée par \vec{n} , vecteur normal à l'interface de séparation et unitaire.

On peut alors définir la pression P par

$$\vec{df} = PdS\vec{n}.$$

La pression représente donc une **force par unité de surface**.

Remarque 2.1 *La pression est indépendante de l'inclinaison de l'interface choisie.*

Unité : le Pascal, notée Pa ; $1Pa = 1N.m^{-2} = 1kg.m^{-1}.s^{-2}$, c'est l'unité utilisée dans le système international.

On utilise parfois également les unités suivantes :

Domaine	Unité	équivalence SI
gaz - liquide	bar	$1bar = 10^5 Pa$
gaz	atmosphère	$1atm = 101325 Pa$
atmosphère (météo)	millibar ou hectopascal	$1mb = 100 Pa$
atmosphère (ancien. utilisée)	millimètre de mercure	$760mmHg = 1atm$

Origine de la pression :

Pression cinétique; pression moléculaire (expliqué en classe)

Ordres de grandeur :

Pression les plus élevées :

- fond des fosses sous-marines : $10^8 Pa$ ($1000atm$);
- synthèse du diamant : $10^{10} Pa$;
- centre de la Terre : $3,6.10^{11} Pa$;
- centre des étoiles : $\sim 10^{15} Pa$.

Pressions les plus basses :

- vide grossier $\sim 10^{-2} Pa$;
- vide poussé $\sim 10^{-11} Pa$.

2.2. L'équilibre d'un fluide.; variation de la pression dans un fluide

2.2.1. Principe fondamental de la statique des fluides

L'étude est effectuée sur un fluide placé dans un champ de forces extérieures (par exemple le champ de pesanteur terrestre). La force par unité de volume correspondante est notée \vec{f}_V . La pression au sein du fluide est variable dans l'espace.

Les coordonnées cartésiennes sont utilisées dans un premier temps.

Considérons un parallélépipède rectangle situé entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$; son volume est $dV = dx dy dz$. Ce parallélépipède est considéré suffisamment petit pour que les variations de pression et de température y soient faibles, mais suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules (sinon la notion de pression et de température n'aurait plus aucun sens).

Nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) au fluide situé dans le parallélépipède. Le fluide est au repos, donc son accélération est nulle.

Le bilan des forces est :

- les forces de pression du fluide situé autour de dV (donc extérieur au système) : il y a 6 forces de pression s'appliquant sur chacune des 6 faces du parallélépipède ;
- les forces extérieures autres que la pression, s'appliquant sur l'ensemble du fluide de dV (par exemple le poids).

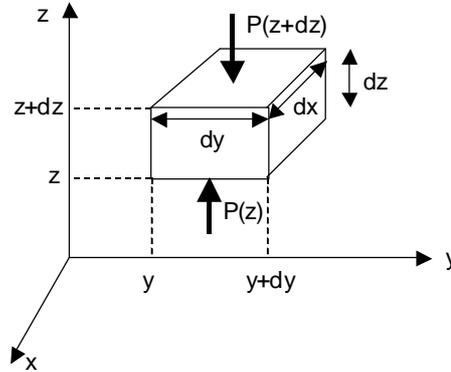


Fig. 2.1.

Projetons le PFD sur l'axe (Oz) : les forces de pression étant orthogonales aux faces du parallélépipède, seuls 2 forces de pression sont dirigées suivant (Oz) : la pression s'exerçant sur la face du dessous (en z) notée $P(z)$ et dirigée vers le haut, et la pression s'exerçant sur la face du dessus (en $z + dz$) notée $P(z + dz)$ et dirigée vers le bas (voir figure 2.1). Notons que la pression variant dans le fluide, *a priori* $P(z) \neq P(z + dz)$.

Cette projection s'écrit :

$$\sum F_z - P(z + dz)dxdy + P(z)dxdy = 0, \quad (1)$$

avec F_z les forces extérieures autres les forces de pression. En divisant par $dV = dxdydz$:

$$\sum \frac{F_z}{dV} - \left(\frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} \right) = 0,$$

soit

$$\sum (f_V)_z - \left(\frac{dP}{dz} \right) = 0, \quad (2)$$

avec f_V les forces **volumiques** s'appliquant sur l'élément dV de fluide (c'est à dire **force par volume**).

Une relation similaire à (2) se détermine de la même manière suivant x et y , ce qui permet d'écrire le **principe fondamental de la statique des fluides** :

$$\sum \vec{f}_V - \overrightarrow{grad}P = 0, \quad (3)$$

Conclusion :

La répartition surfacique des forces de pression est équivalente à une répartition **volumique** de forces de la forme $\left(-\overrightarrow{grad}P \right)$.

Le principe fondamental de la statique des fluides consiste à écrire que la somme des forces volumiques s'appliquant sur un petit volume de fluide dV à laquelle le terme $\left(-\overrightarrow{grad}P \right)$ est ajouté, est nulle.

Exemple :

Le cas le plus couramment étudié concerne la seule présence de la force de pesanteur (fluide situé sur Terre, comme l'atmosphère terrestre ou les océans). La force volumique de pesanteur est :

$$\vec{f}_V = \frac{\vec{F}}{dV} = \frac{(dm) \vec{g}}{dV} = \rho \vec{g},$$

avec dm la masse du petit volume dV et $\rho = dm/dV$ la masse volumique du fluide considéré. En appliquant le principe fondamental de la statique des fluides (3) projeté sur (Oz) , il vient :

$$-\rho g - \frac{dP}{dz} = 0,$$

soit

$$dP = -\rho g dz. \quad (4)$$

2.2.2. Cas d'un fluide incompressible et homogène**2.2.2.1. Modèle**

Supposons ici que la seule force appliquée est le champ de pesanteur terrestre, et que le champ de pesanteur est uniforme : la relation (4) peut donc être utilisée avec g constante.

En première approximation, les liquides peuvent être considérés comme incompressibles (par exemple pour l'eau dans un océan ou un lac). Une même masse de liquide occupe donc toujours sensiblement un même volume, donc $\rho \simeq cte$.

La relation (4) s'intègre donc aisément en

$$P - P_0 = -\rho g(z - z_0)$$

en notant P_0 la pression en $z = z_0$. La différence de pression entre deux points d'un fluide incompressible est proportionnelle à la dénivellation.

2.2.2.2. Conséquences

- Les surfaces isobares sont horizontales ;
- $P = P_0 + g \int \rho dz$. Le dernier terme de cette égalité est le poids du liquide contenu dans un cylindre de hauteur $z - z_0$ et d'aire l'unité.

2.2.2.3. Applications

-*Pression dans un océan* : $\rho_{eau} g \simeq 1000 * 10 = 10^4 Pa/m$. L'augmentation de pression en descendant dans l'océan est donc d'environ 1 bar tous les 10 mètres. Compte tenu de la continuité de la pression à l'interface entre l'océan et l'atmosphère (où $P \simeq 1bar$), la pression à 10 mètres de profondeur est de 2 bars.

-*Les vases communicants*

Voir cours.

-*Le tonneau de Pascal*

Voir cours.

2.2.3. Cas de l'atmosphère isotherme

2.2.3.1. Modèle

L'objectif est ici de calculer la pression l'atmosphère terrestre en fonction de l'altitude (en considérant la température comme constante : atmosphère dite isotherme). Le champ de pesanteur est également considéré uniforme.

Le calcul est basé sur l'équation (4), conséquence du principe fondamental de la statique de fluides. La principale difficulté de ce calcul vient du fait que l'air **ne peut pas** être considéré comme incompressible : ρ n'est plus une constante (l'air se raréfie en altitude). Nous allons plutôt utiliser la loi du gaz parfait pour décrire l'air, d'où :

$$P = \frac{\rho RT}{M},$$

avec R la constante des gaz parfaits, T la température de l'air, et M la masse molaire de l'air ($M_{air} \simeq 29g/mol$). En remplaçant dans l'équation (4)

$$dP = -\rho g dz$$

il vient :

$$dP = -\frac{PM}{RT} g dz$$

soit, en séparant les variables P et z (T est constante)

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT} g dz \quad (5)$$

qui s'intègre en

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M}{RT} g(z - z_0),$$

soit

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{M}{RT} g(z - z_0)\right). \quad (6)$$

Remarque 2.2 *Ce modèle de l'atmosphère isotherme peut être amélioré, en considérant, par exemple, que la température décroît en fonction de l'altitude. Les calculs jusqu'à l'équation (5) restent valables ; il faut ensuite proposer une loi $T(z)$ (par exemple affine $T = T_0 - az$) pour remplacer T dans l'équation (5). L'intégration de cette équation est alors différente de ce qui vient d'être proposé. Cet exemple est traité en TD.*

Remarque 2.3 *En appliquant la relation (6) obtenue à un gaz dont les particules ont une masse m , et étant donné que $M = mNa$ et $R = kNa$, on peut écrire :*

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mg(z - z_0)}{kT}\right). \quad (7)$$

La pression décroît d'autant plus rapidement avec l'altitude que les particules ont une masse importante. L'interprétation de ce phénomène est donnée dans la partie qui suit.

2.2.3.2. Applications numériques

- Considérons un récipient de 10cm de hauteur, rempli d'air ($M = 29\text{g/mol}$) à température $T = 273\text{K}$ ayant une pression $P_0 = 1\text{atm}$ à sa base. La pression en haut du récipient (altitude de 10cm) est de $0,999988\text{atm}$, soit une variation de $1,2 \cdot 10^{-3}\%$. La pression à l'échelle d'un récipient ou même d'une salle est quasiment constante.

- Considérons une colline de 100m de haut. Avec une température $T = 273\text{K}$, pour de l'air ($M = 29\text{g/mol}$) à $P_0 = 1\text{atm}$ à la base de cette butte, la pression à une altitude de 100m est de $0,988\text{atm}$, soit une variation de $1,2\%$. Cette variation est relativement faible, mais décelable (du même ordre de grandeur que les variations dues aux conditions météorologiques). Il faut donc tenir compte de ces variations de pression sur quelques centaines de mètres ou quelques kilomètres de dénivellation.

2.2.3.3. Formule du nivellement barométrique

Reprenons la formule (7).

$mg(z - z_0) = Ep$ est l'énergie potentielle de pesanteur de la particule de masse m . D'autre part kT est homogène à une énergie : c'est l'énergie d'agitation thermique. La formule (7) s'écrit donc

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Ep}{kT}\right)$$

appelée formule du nivellement barométrique. La répartition de pression en fonction de l'altitude résulte d'une compétition entre la force de pesanteur d'énergie Ep qui tend à ramener les particules vers le bas, et de l'agitation thermique qui tend à faire remonter les particules et donc à homogénéiser la pression.

Ce phénomène peut s'illustrer en déterminant la variation de la densité particulaire en fonction de l'altitude. La densité particulaire $n(z)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} n(z) &= \frac{P}{kT} = \frac{P_0}{kT} \exp\left(-\frac{Ep}{kT}\right) \\ n(z) &= n_0 \exp\left(-\frac{Ep}{kT}\right). \end{aligned}$$

Il est clair sur cette formule que si l'énergie potentielle est importante, la décroissance exponentielle est plus rapide. L'effet est contraire, si la température T , et donc l'agitation thermique d'énergie kT , est importante.

Remarque 2.4 *L'énergie potentielle Ep est proportionnelle à la masse de la particule. La densité particulaire du di-hydrogène ($M = 2\text{g/mol}$) doit donc décroître moins rapidement que la densité particulaire du di-oxygène (32g/mol) ou du di-azote ($M = 28\text{g/mol}$). On peut effectivement constater que la pourcentage en di-hydrogène dans l'atmosphère devient plus important à haute altitude.*

2.3. Le théorème d'Archimède

2.3.1. Enoncé

La résultante des forces pesantes agissant sur un corps plongé dans un **fluide en équilibre**

est égale et directement opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_{\text{fluide-déplacé}}.$$

Remarque 2.5 *La condition d'application principale du théorème est que le fluide doit être au repos (les écoulements, vent, courants, vagues, etc... sont exclus). Aucune hypothèse sur l'homogénéité ou la compressibilité des fluides n'a été effectuée.*

2.3.2. Démonstration

Rédaction ultérieure (voir cours en classe)

2.3.3. Applications

Bateau
Montgolfière
Mouvements de convection
etc...