Chapitre 4
Les oscillateurs libres

4.1. L'oscillateur harmonique unidimensionnel sans amortissement

Prenons deux exemples d'oscillateurs harmoniques, ce qui nous permettra par la suite d'effectuer une synthèse.

4.1.1. Premier exemple : le système masse ressort horizontal

Soit un point M de masse m accroché au bout d'un ressort de raideur k ; ce ressort a une longueur à vide égale à l_0. Cette masse est d'abord placée sans vitesse et la longueur du ressort est l_0 (ressort non étiré). Le bilan des forces est le suivant : la force de rappel du ressort est nulle, la réaction du support est verticale et opposée au poids de la masse. La somme des forces est nulle : la masse reste dans sa position sans mouvement. **La masse est dite au repos ou en équilibre**. Dans ce cas, la longueur à l'équilibre est la même que la longueur du ressort à vide.

Ecartons ensuite cette masse de sa position au repos d'une distance x ; la longueur totale du ressort est $l = l_0 + x$. Le bilan des forces est le suivant : la force de rappel du ressort agit horizontalement et vaut $-k(l - l_0) = -kx$, et les deux forces verticales (poids de la masse et réaction du support) se compensent. Finalement :

$$\sum \overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{e_x}.$$

Il est utile de préciser que la force du ressort est une force de rappel, ce qui justifie le signe négatif devant kx ; d'autre part l'intensité de cette force est toujours proportionnelle à son allongement, c'est à dire à l'écart avec la position au à vide.

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\overrightarrow{e_x}$ est alors :

$$ma(M) = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

C'est une équation différentielle du second degré en x.

4.1.2. Deuxième exemple : le système masse ressort vertical

Prenons le même ressort de raideur k et plaçons le verticalement. Il est accroché en haut à un point fixe O. La longueur du ressort à vide (c'est à dire sans masse) est l_0. A l'autre extrémité du ressort est placée la masse m, dans un premier temps de manière à ce que la masse soit au repos (à l'équilibre). Soit l_{eq} la longueur du ressort à l'équilibre et $x_{eq} = (l_{eq} - l_0)$ l'allongement correspondant du ressort. L'axe (Ox) est placé suivant la direction du ressort et nous le choisissons par exemple dirigé vers le bas.

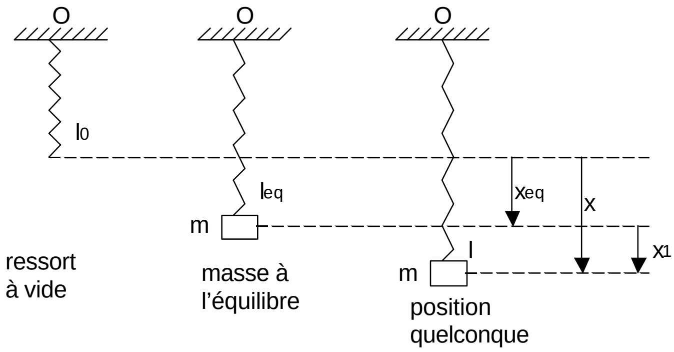

Fig.4.1.

Les forces s'appliquant sur m sont : le poids dirigé verticalement vers le bas et la force de rappel du ressort verticale également. A l'équilibre, la somme des forces est nulle. En projection sur $\vec{e}_x$, il vient :

$$mg - kx_{eq} = 0.$$

L'allongement du ressort à l'équilibre est donc :

$$x_{eq} = \frac{mg}{k}.$$

Ecartons ensuite cette masse d'une longueur $x = l - l_0$ par rapport à sa position à vide (l est la longueur totale du ressort). Le bilan des forces est le suivant : la force de rappel du ressort et le poids de la masse sont les deux seules forces et agissent verticalement. Le principe fondamental de la dynamique projeté verticalement s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx \qquad (1)$$

ce qui donne l'équation différentielle avec second membre suivante :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g.$$

Il est plus élégant de prendre comme variable non pas x l'allongement du ressort par rapport à sa position à vide, mais x_1 l'écart par rapport à la position d'équilibre ; on a :

$$x_1 = l - l_{eq} = x - x_{eq}.$$

Remplaçons x par x_1 dans l'équation (1), sachant que $x = x_1 + x_{eq}$ et que x_{eq} est une constante :

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\left(x_1 + x_{eq}\right)}{dt^2} &= mg - k\left(x_1 + x_{eq}\right)\\
m\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= mg - kx_{eq} - kx_1\\
m\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -kx_1.
\end{aligned}
$$

ce qui donne l'équation différentielle sans second membre suivante :

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = 0.$$

4.1.3. Synthèse des deux exemples

Les exemples précédents permettent tout d'abord d'effectuer deux remarques importantes.

(1) Il faut insister sur le fait que la longueur du ressort à vide est souvent différente de la longueur du ressort à l'équilibre. Les équations peuvent alors s'écrire soit en utilisant comme variable l'écart avec la position à vide (allongement du ressort), soit l'écart avec la position à l'équilibre. Il est possible de vérifier sur de nombreux exemples différents que le fait d'introduire comme variable l'écart par rapport à l'équilibre simplifie l'équation différentielle obtenue en supprimant le second membre. La démarche à suivre la plus judicieuse est alors d'écrire les équations dans un premier temps en utilisant l'allongement du ressort comme variable, puis, éventuellement, de faire apparaître la variable représentant l'écart avec la position d'équilibre, ce qui simplifiera l'écriture de l'équation différentielle obtenue.

(2) Il est essentiel d'être rigoureux au niveau de l'écriture des signes. Si l'on reprend le deuxième exemple, l'orientation de l'axe des x ne change aucunement l'expression de la force de rappel du ressort qui sera toujours $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, avec un signe négatif. Par contre, le poids s'écrit $m\vec{g} = \pm mg\vec{e}_x$, le signe dépendant de l'orientation de l'axe x.

Une fois ces précautions prises, il est toujours possible de se ramener à une équation différentielle du second ordre du type

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

pour un oscillateur sans frottements. Les solutions sont de la forme

$$\boxed{X = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

ou

$$X = C\cos(\omega t + \varphi); \tag{2}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

où A et B (ou C et φ) sont des constantes déterminées par les conditions initiales. Ce sont les solutions d'un oscillateur harmonique. Le terme oscillateur signifie que la solution est périodique ; le terme harmonique précise que la solution est sinusoïdale.

Remarque 4.1 La période des oscillations est $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ ne dépend que de la masse et de la raideur des oscillations, mais pas du tout de l'amplitude de l'oscillation !

Remarque 4.2 Les cas étudiés précédemment sont des cas particuliers d'oscillateurs harmoniques. Plus généralement, pour un oscillateur quelconque, il est possible de vérifier que le mouvement est périodique, mais pas nécessairement sinusoïdal !

4.1.4. Le cas général de l'oscillateur harmonique

Seul l'oscillateur harmonique unidimensionel est abordé ici.

Considérons une force $\vec{F}$ quelconque agissant sur un point M de masse m et dérivant d'une énergie potentielle $Ep(x)$. Soit x_{eq} la valeur de x pour laquelle M est en équilibre stable. $Ep(x)$ passe donc par un minimum local en $x = x_{eq}$. Si la masse M est écartée de position d'équilibre, la force $\vec{F}$ tend à l'y ramener : il y a alors oscillation de M autour de x_{eq}. Soit Em l'énergie mécanique de la particule, et en se limitant au cas d'un oscillateur sans amortissement, Em se conserve. Il est alors possible de déterminer x_{1lim} et x_{2lim} les valeurs limites de l'oscillation (voir figure 4.2).

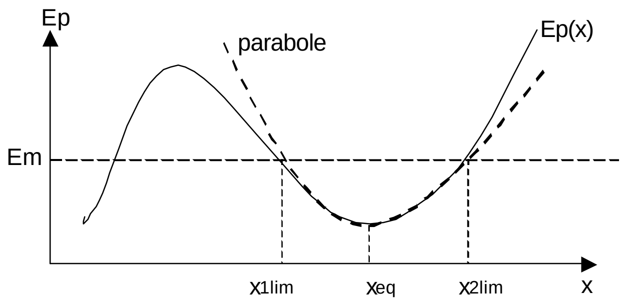

Fig.4.2.

En réalité l'oscillateur est rarement harmonique, sauf dans le cas de petites oscillations. Limitons nous seulement à l'étude de petites oscillations de M autour de sa position d'équilibre. Notons $X = x - x_{eq}$ l'écart avec l'équilibre. Le développement limité à l'ordre 2 de X autour de 0 s'écrit :

$$Ep(X) = Ep(X = 0) + \frac{dEp(X = 0)}{dx} X + \frac{d^2Ep(X = 0)}{dx^2} \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right). \qquad (3)$$

Notons Ep_0 la valeur de $Ep(X = 0)$ qui n'a aucune signification physique étant donné qu'une énergie potentielle est définie à une constante près. De plus, à l'équilibre : $dEp(X = 0)/dx = 0$. Enfin, notons k la dérivée seconde de Ep en 0 :

$$d^2Ep(X = 0)/dx^2 = k.$$

La relation (3) s'écrit alors

$$Ep(X) = Ep_0 + \frac{1}{2}kX^2 + o\left(X^2\right), \qquad (4)$$

ce qui revient à approcher le voisinage du minimum de Ep par une parabole (voir figure 4.2). La force $\vec{F}$ projetée suivant $\vec{e}_x$ s'écrit au premier ordre en X :

$$F = -kX + o(X).$$

L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors

$$\ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0.$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$.

En conclusion : Pour un oscillateur harmonique unidimensionnel sans amortissement, l'énergie potentielle s'écrit $Ep(X) = (1/2)\,kX^2$ (en choisissant la constante nulle), et la force (projetée) $F = -kX$.

Remarque 4.3 La plupart des oscillateurs se ramènent à un oscillateur harmonique pour peu que l'oscillation soit de suffisamment faible amplitude. Toutefois, quelques oscillateurs, même pour de très faibles amplitudes, ne sont pas harmoniques : il suffit que la dérivée seconde de Ep en 0 soit nulle. Il n'est alors plus possible de ramener l'écriture de $Ep(X)$ à la relation (4). Le développement limité (3) doit être développé à un ordre plus élevé.

4.1.5. Propriétés énergétiques

L'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique est

$$Ep(X) = \frac{1}{2} kX^2,$$

et la solution générale du mouvement est de la forme

$$X = X_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

L'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Ec &= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\left(-X_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)\right)^2 \\ Ec &= \frac{1}{2} kX_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

car $\omega = k/m$.

Finalement l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} Em &= Ec + Ep \\ &= \frac{1}{2} kX_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} kX_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} kX_0^2. \end{aligned}$$

Il est normal de retrouver une énergie mécanique constante au cours du temps.

Equipartition de l'énergie

Calculons la moyenne de l'énergie potentielle au cours du temps :

$$\begin{aligned} \langle Ep \rangle_t &= \frac{1}{2} kX_0^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle_t \\ &= \frac{1}{4} kX_0^2. \end{aligned}$$

Calculons la moyenne de l'énergie cinétique au cours du temps :

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle_t &= \frac{1}{2} k X_0^2 \left\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \right\rangle_t \\ &= \frac{1}{4} k X_0^2. \end{aligned}$$

Pendant le mouvement, les énergies cinétiques et potentielles varient, mais la masse possède en moyenne dans le temps autant d'énergie cinétique que d'énergie potentielle (c'est à dire 50% de l'énergie mécanique). On dit qu'il y a équipartition en moyenne de l'énergie.

4.2. L'oscillateur harmonique unidimensionnel avec amortissement

Seul le cas de l'oscillateur harmonique amorti par des frottements visqueux de type $\vec{F} = -h\vec{v}$ est abordé ici.

4.2.1. Le cas général de l'oscillateur harmonique avec amortissement

Soit une masse m accrochée au bout d'un ressort et se déplaçant uniquement suivant $\vec{e}_x$. Les forces sont : le rappel du ressort $\vec{F} = -kX\vec{e}_x$ et le frottement fluide. La projection de ces forces sur l'axe (OX) s'écrit :

$$F = -kX - hv.$$

Remarque 4.4 Il y a systématiquement un signe (-) devant kX, car c'est une force de rappel ; de même, il y a systématiquement un signe (-) devant hv car cette force s'oppose au mouvement.

L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors

$$\ddot{X} + \frac{h}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0.$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti. Cette équation différentielle est similaire à celle qui a été obtenue en électronique pour un circuit RLC par exemple. Il est possible de l'écrire sous forme canonique, comme en élctronique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0. \tag{5}$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur (unités : s^{-1}) ; Q est le facteur de qualité. Il est également possible d'écrire l'équation différentielle (5) sous la forme

$$\ddot{X} + 2\alpha\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

2α est appelé le coefficient d'amortissement et n'a pas d'unité. Selon les ouvrages, il est également possible de trouver encore d'autres formes d'écritures canoniques (le terme $2\alpha\omega_0$ peut être écrit tout simplement 2α, ou $1/\tau$ avec τ temps de relaxation).

L'équation caractéristique associée à (5) est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Il existe trois types de solutions $X(t)$ suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique.

Le régime apériodique

Il correspond à $\Delta > 0$ ou $Q < 1/2$ ou $\alpha > 1$.

Le coefficient d'amortissement est élevé (faible facteur de qualité).

Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et négatives :

$$r_{1,2} = \omega_0 \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}}{Q}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$X(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t).$$

A et B sont déterminées par les conditions initiales ; les exponentielles sont décroissantes : la solution tend vers 0 dans le temps à cause de l'amortissement.

Le régime critique

Il correspond à $\Delta = 0$ ou $Q = 1/2$ ou $\alpha = 1$.

La solution de l'équation caractéristique est double et réelle :

$$r = \frac{\omega_0}{Q}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$X(t) = (C + Dt) \exp(r_1 t).$$

C et D sont déterminées par les conditions initiales ; l'exponentielle est décroissante : la solution tend vers 0 dans le temps à cause de l'amortissement. La décroissance est plus rapide que dans le régime apériodique.

Le régime pseudo-périodique

Il correspond à $\Delta < 0$ ou $Q > 1/2$ ou $\alpha < 1$.

Le coefficient d'amortissement est faible (grand facteur de qualité).

Les solutions de l'équation caractéristique sont complexes :

$$r_{1,2} = \omega_0 \frac{-1 \pm j\sqrt{4Q^2 - 1}}{Q} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$$

avec $1/\tau = \omega_0/Q$ et $\omega = \omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}$.

Les solutions sont donc de la forme

$$X(t) = E \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

ou

$$X(t) = \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) (F \cos \omega t + G \sin \omega t).$$

E et φ, ou F et G sont déterminées par les conditions initiales. C'est une oscillation dont l'amplitude est décroissante exponentiellement. La pseudo-période est $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\left(\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}\right)$.

Remarque 4.5 Le régime le plus rapide pour retrouver la position d'équilibre $X = 0$ est le régime critique.

4.2.2. Propriétés énergétiques

L'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique est $Ep(X) = 1/2kX^2$.
L'application du théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{d}{dt}(Em) = \vec{F}\cdot\vec{v}\,;$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2\right) = -hv^2 < 0.$$

L'énergie mécanique ne se conserve pas car la force de frottement est non conservative : l'énergie mécanique diminue au cours du temps jusqu'à son minimum possible. Le minimum d'énergie mécanique qu'il est possible d'atteindre correspond à une énergie cinétique nulle et une énergie potentielle minimale, c'est-à-dire une position d'équilibre stable. En présence d'amortissement, l'oscillateur tend progressivement vers sa position d'équilibre avec une vitesse devenant nulle.

4.3. Analogie électro-mécanique

Comparons les équations différentielles obtenues en électronique dans le cas d'un circuit RLC série d'une part, et en mécanique pour un oscillateur d'autre part. Ces équations sont respectivement :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0; \tag{6}$$

$$m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = 0. \tag{7}$$

L'analogie électro-mécanique peut s'effectuer comme suit.

Mécanique	Electronique
m masse	L bobine
h amortissement	R résistance
k ressort	$1/C$ capacité
x position	q charge
$v = \dot{x}$ vitesse	$i = \dot{q}$ courant
$F = kx; h\dot{x}; m\ddot{x}$ force	$U = (1/C)q; R\dot{q}; L\ddot{q}$ tension

L'analogue de la loi des noeuds (6) $\sum U = 0$ est le principe fondamental de la dynamique (7) : $\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$. Un problème complexe de mécanique comportant plusieurs masses et plusieurs ressort (étude de vibrations mécaniques dans une structure mécanique complexe comme une voiture, par exemple) peut se ramener par analogie en un problème d'électronique. Des théorèmes simplificateurs comme le théorème de Thévenin ou de Norton peuvent ensuite facilement être appliqués pour simplifier le problème.

4.4. Le portait de phase

4.4.1. Mécanique et déterminisme

La mécanique classique est basée sur des équations déterminées, comme le principe fondamental de la dynamique qui relie les causes du mouvement que sont les forces, aux éléments cinématiques (accélération, vitesse, position). L'étude d'un problème mécanique s'effectue alors de la manière suivante. La connaissance de l'environnement d'un système de masse m permet de déterminer les forces qui s'applique sur ce système ; le principe fondamental de la dynamique donne l'accélération de la masse. Il suffit alors de connaître la position et la vitesse initiale de l'objet : il est possible par le calcul de prévoir avec certitude l'avenir du système, c'est-à-dire ses positions et vitesses futures à tout instant. On dit que la mécanique classique est déterministe. En résumé, pour un problème mécanique donné , la connaissance des vecteurs position et vitesse à un instant donné suffit pour déterminer ces derniers à tout instant. L'**espace des phases** est alors défini. Cet espace comporte 6 dimensions : les coordonnées de la position et les coordonnées de la vitesse. Un point dans cet espace des phases correspond à un **état du système** (1 état = 1 position + 1 vitesse). Par exemple en coordonnées cartésiennes, l'espace des phases comporte les 6 dimensions suivantes : $x; y; z; v_x; v_y; v_z$. Les conditions initiales $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ et $\vec{v}_0(v_{x0}; v_{y0}; v_{z0})$ d'un problème sont représentées par un point dans cet espace. Comme nous l'avons vu, la connaissance de ce point suffit pour déterminer avec certitude l'état ultérieur du système à tout instant. A un instant t ultérieur correspond alors un nouveau point dans l'espace des phases. L'ensemble de ces points forme une courbe qui est appelée la **trajectoire des phases**.

Limitons nous ici aux problèmes à une seule dimension spatiale, formant des espaces des phases à deux dimensions, appelés **plans de phase**. C'est le cas par exemple d'une masse accrochée au bout d'un ressort et se déplaçant rectilignement suivant (Ox) : les variables de l'espace des phases sont x en abscisse et $v = \dot{x}$ en ordonnées. C'est le cas également d'un pendule oscillant (voir exercice de TD) : les variables sont respectivement μ et $\dot{\mu}$.

Il reste à donner quelques propriétés des portraits de phase, puis à donner une méthode de tracé.

4.4.2. Propriétés du portait de phase

- Tout d'abord, il est utile de préciser que des courbes dans un portait de phase ne peuvent jamais se croiser. En effet, si deux courbes se croisent, cela signifie que leur état au point de croisement est le même (même position et même vitesse) et que donc leur mouvement ultérieur est nécessairement identique.

- Pour des mouvements périodiques, les trajectoires de phases sont des courbes fermées. En effet, au bout d'un temps égal à la période T, le système revient à la même position et à la même vitesse : les points dans l'espace des phases à t et à $t + T$ sont identiques.

- Définissons maintenant les points singuliers : ce sont les points pour lesquels à la fois la vitesse et l'accélération sont nulles. Autrement dit, ce sont les points d'équilibre. Leurs coordonnées dans l'espace des phases sont : $x = x_{eq}$ et $v = 0$. Ils sont donc tous situés sur l'axe des abscisses. Si une particule est placée dans cet état, elle y demeurera indéfiniment.

- Enfin, plaçons une particule dans la partie supérieure du plan de phase. Sa vitesse est positive, ce qui signifie qu'elle se déplace dans le sens des x croissants, donc nécessairement vers la droite. Inversement, dans la partie inférieure du plan de phase, la vitesse est négative, la position décroissante et le déplacement dans cet espace des phases vers la gauche. On peut en conclure par exemple qu'une trajectoire fermée du plan de phase est nécessairement parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre.

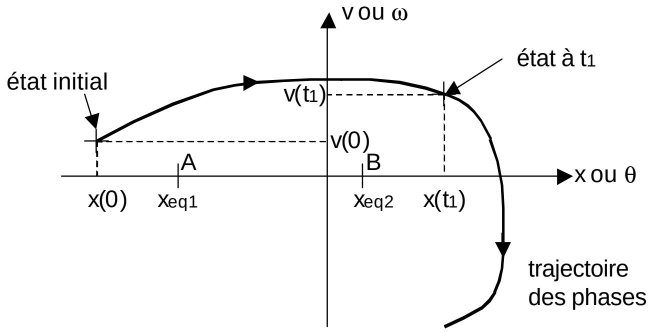

Fig.4.3. Le plan de phase. La trajectoire des phases est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre autour du (ou des) point(s) singulier(s) (ici A et B).

4.4.3. Tracé d'un portait de phase

Il existe principalement deux méthodes pour tracer un portait de phase.

La première consiste à déterminer la trajectoire à tout instant ainsi que la vitesse : on obtient une équation horaire x(t) et v(t) de la trajectoire de phase.

La seconde cherche à relier directement la position à la vitesse à l'aide du théorème de l'énergie cinétique. C'est cette seconde méthode que nous allons utiliser dans les deux exemples qui suivent.

Portait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti

On a

$$E_m = cte;$$

soit, en notant x l'écart avec l'équilibre

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte = E$$

$$\frac{\dot{x}^2}{(2E/m)} + \frac{x^2}{(2E/k)} = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre O, le point O étant un point singulier. Les demi axes ont pour longueur $\sqrt{2E/m}$ suivant l'axe $\dot{x}$ et $\sqrt{1E/k}$ suivant l'axe x. Cette ellipse est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre autour du point singulier.

Portait de phase d'un oscillateur harmonique amorti

La trajectoire des phases est une spirale qui s'enroule dans le sens des aiguilles d'une montre autour du point singulier O jusqu'à rejoindre ce point singulier, à cause de l'amortissement.

Ce résultat se généralise à tout mouvement amorti : la perte d'énergie finit par faire tendre la trajectoire vers un point singulier (point attracteur) ; ce point singulier est l'état de la particule au bout d'un temps très long. Il faut en fait séparer les points singuliers en deux catégories : seuls les points correspondant à des positions d'équilibres **stables** sont attracteurs.